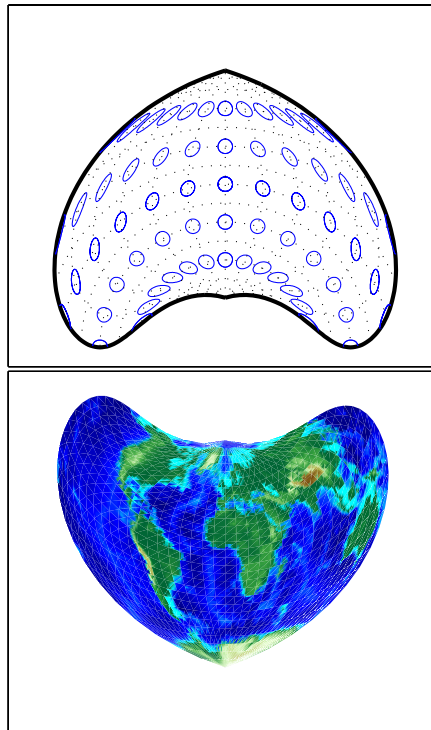




INSTITUT GEOGRAPHIQUE NATIONAL
ÉCOLE NATIONALE
DES SCIENCES
GÉOGRAPHIQUES

LES PROJECTIONS ET RÉFÉRENTIELS

CARTOGRAPHIQUES



Patrick SILLARD

Septembre 2000

AVANT PROPOS

Ce document est issu de deux conférences données en maîtrise de géographie à l'Université de Paris I. Les trois premiers chapitres s'adressent à un lecteur intéressé par la compréhension de la construction des représentations planes de la surface terrestre. Ces chapitres ne font appel à aucune connaissance mathématique particulière. Le premier chapitre traite du référentiel géographique, c'est-à-dire de l'ensemble des étapes qui permettent de passer d'un point de l'espace physique au voisinage de la Terre à son homologue sur une carte. Le second chapitre est consacré aux représentations planes de la Terre. La rédaction est essentiellement descriptive et insiste sur les déformations que subit la réalité en projection. C'est en effet principalement sur ce critère qu'on effectue le choix de représentation adapté à l'objectif de la carte. Le troisième chapitre évoque quant à lui quelques problèmes que le cartographe peut résoudre avec un choix judicieux de référentiel géographique. L'attention du lecteur est attirée sur le danger qu'il y aurait à utiliser aveuglément les référentiels géographiques sans en comprendre les attendus. Les systèmes d'information géographiques font courir ce risque et il convient d'être prudent ...

Si le reste du document ne pose pas de difficulté particulière, il a toutefois été jugé nécessaire de compléter les trois premiers chapitres essentiellement descriptifs par une annexe de géométrie différentielle qui présente les outils mathématiques des projections cartographiques. Ce chapitre fait appel à des connaissances assez soutenues en algèbre et analyse. On a essayé de présenter les concepts sous un angle différent des traités classiques sur les projections : lorsqu'elle ne nuisait pas à la compréhension, une approche intrinsèque des surfaces a été privilégiée. Le niveau de rédaction reste générale et les applications ont été données pour une Terre en approximation sphérique.

Patrick Sillard
23 Octobre 2000

CHAPITRE I

LE RÉFÉRENTIEL GÉOGRAPHIQUE

Le référentiel géographique est l'ensemble de conventions qui permettent d'associer à tout point d'une partie de la surface terrestre un point unique sur une carte.

Traditionnellement, pour représenter la surface terrestre on utilise une représentation de la surface qui altère aussi peu que possible les propriétés métriques du terrain (distance entre les points de la surface terrestre, angles, etc.). Le schéma le plus couramment employé est présenté à la figure I.1.

1. Le système de référence terrestre

L'espace géométrique au voisinage de la Terre est parfaitement décrit par trois dimensions. Cette situation conduit naturellement à introduire un système d'axes cartésien centré au centre de la Terre tournant avec la Terre. Ce système d'axe est appelé système de référence terrestre. Il permet de repérer un point au voisinage de la Terre (donc à sa surface) par trois coordonnées (x, y, z) . Sa construction est essentiellement implicite car aucun système de mesure ne permet directement de donner de positions exprimées dans le système terrestre. Les positions résultent toujours d'un calcul effectué à partir d'observations de triangulation. Jusque dans les années 1970, les observations de base étaient faites au sol. Depuis cette époque, les observations sont faites à partir de système spatiaux (satellites pour l'essentiel). Le système de positionnement le plus connu est le GPS (Global Positioning System). La nécessité de procéder à des calculs justifie le panel de précisions de positionnement auquel donne accès le GPS : depuis la centaine de mètres pour les récepteurs « bas de gamme » pour lesquels le calcul est peu soigné, jusqu'aux récepteurs géodésiques donnant accès au centimètre à l'échelle de la Terre ... La figure I.2 montre la constellation

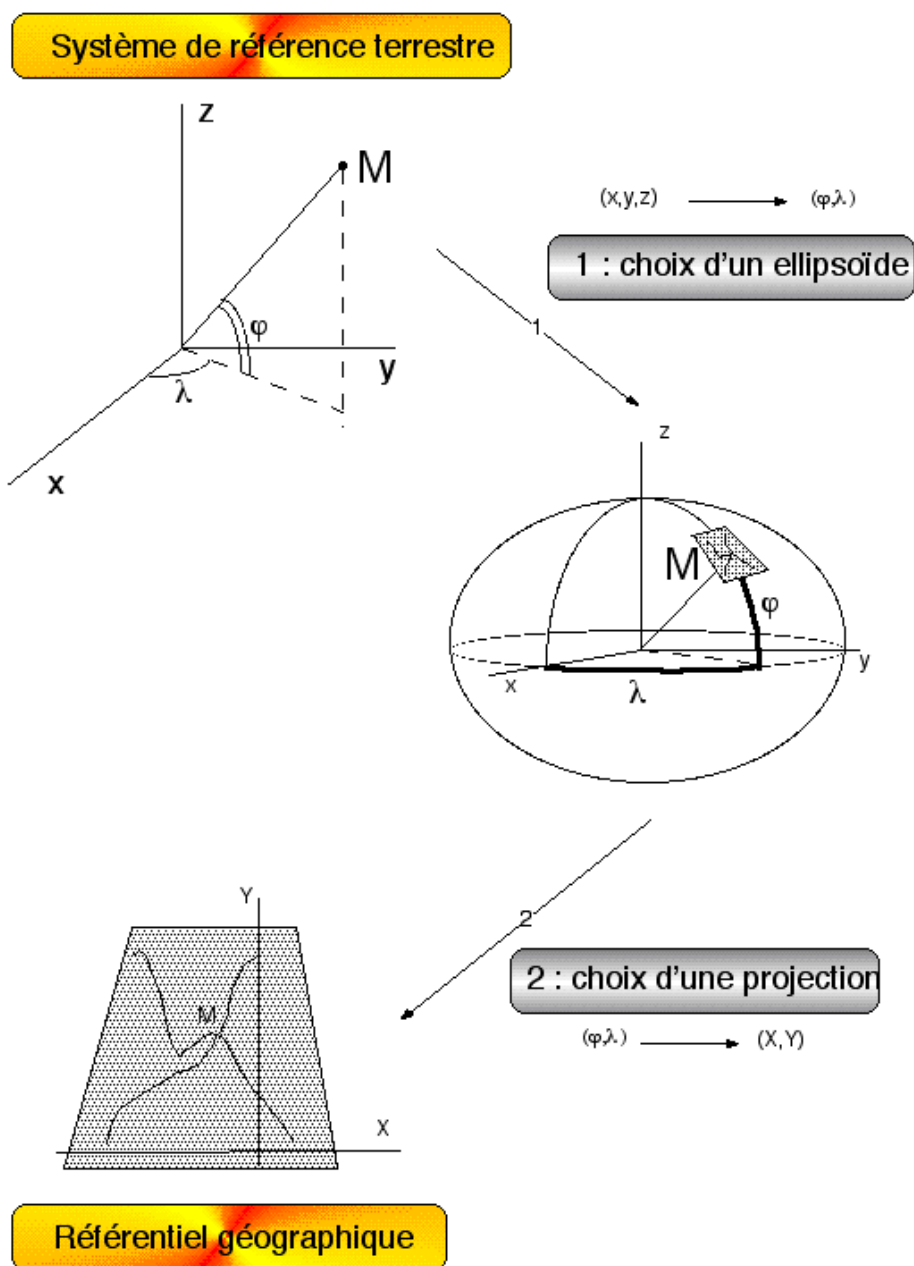


FIG. I.1: La construction du référentiel géographique

de satellites GPS. Ces satellites sont au nombre de 24. Ils sont en orbite autour de la Terre sur 6 plans différents.

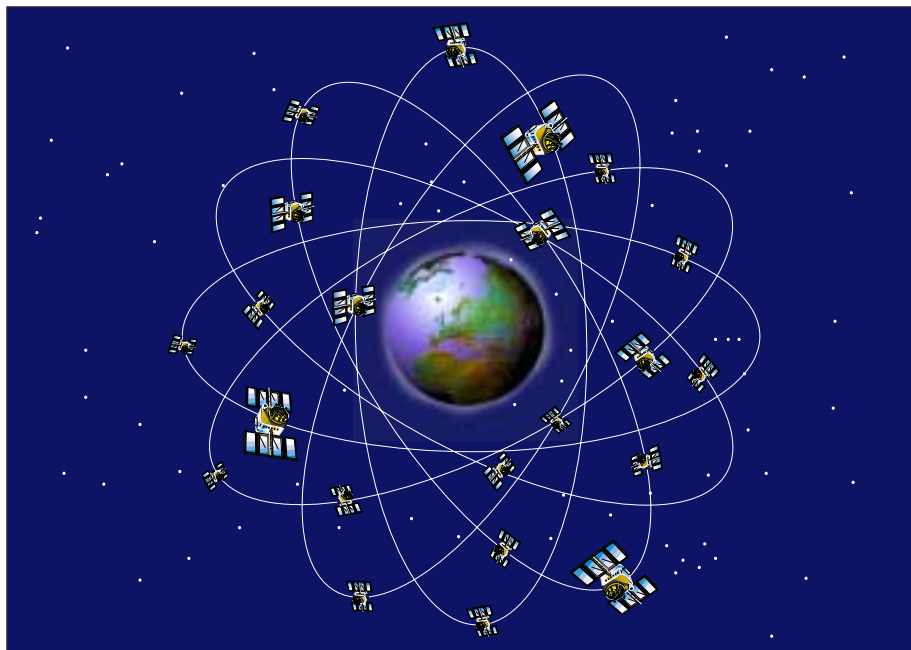


FIG. I.2: La constellation de satellites GPS

Le système a été développé pour les besoins de positionnement en temps réel de l'armée américaine. Le signal temps réel a été longtemps brouillé de façon à dégrader les performances pour des utilisateurs non-habitués. La dégradation volontaire du système a été supprimée récemment améliorant ainsi ce mode de positionnement (quelques mètres de précision).

Les systèmes de référence terrestres sont intimement liés aux mesures qui permettent de le construire¹. La détermination des coordonnées étant implicite, le système est construit en posant des conditions que doit vérifier le système (mouvement accompagnant la Terre dans sa rotation, origine du système au centre des masses de la Terre). Les observations n'étant pas parfaites, ces conditions ne sont qu'approximativement vérifiées. C'est la raison pour laquelle il existe un grand nombre de systèmes de référence différents. En particulier, les anciens systèmes réalisés par des mesures au sol peuvent être excentrés du centre de la Terre de plusieurs kilomètres. Les nouveaux systèmes réalisés par mesures spatiales sont tous cohérents à quelques centimètres près. Pour la cartographie, les seuls problèmes qui

¹On dira que le système est réalisé (au sens de rendre réel) par un jeu de mesures géodésiques.

se posent résident dans l'utilisation de coordonnées de points terrestres exprimées dans des systèmes de référence réalisés par d'anciennes mesures.

Changer de système de référence consiste à appliquer une transformation mathématique appelée similitude vectorielle. Cette transformation conserve le rapport des distances entre points : si A et B sont deux points positionnés dans les systèmes de référence (1) et (2), alors il existe k constant quels que soient A et B tel que $\overrightarrow{AB}_{(1)} = k \overrightarrow{AB}_{(2)}$. Mathématiquement, une telle transformation dépend de 7 paramètres (trois en translation, une échelle et trois en rotation). Pour les changements de système de référence faisant intervenir d'anciens systèmes, une translation suffit en général.

Ainsi, en France, deux systèmes de référence coexistent : le système NTF (Nouvelle Triangulation de la France), ancien système national réalisé à partir de mesures terrestres, et le système RGF93 (Réseau Géodésique Français) réalisé à partir de mesures satellitaires. Le passage de l'un à l'autre s'opère par un changement d'origine donné à la formule I.1 (Boucher, 1988).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{RGF} = \begin{pmatrix} -168m \\ -60m \\ 320m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{NTF} \quad (\text{I.1})$$

Ces transformations peuvent être tout à fait considérables en amplitude. Elles sont la cause de multiples erreurs et d'incompréhensions. Il convient donc d'être très vigilant à cet aspect du problème.

2. L'ellipsoïde de révolution

La représentation de la surface de la Terre passe par l'adoption d'un modèle de Terre aussi proche que possible de la réalité. En adoptant cette surface d'approximation, on cherche à cartographier la Terre en précisant ses irrégularités par rapport à cette surface (c'est l'altitude), et en appliquant les détails horizontaux directement sur cette surface (c'est la planimétrie). La surface de référence est aussi choisie de façon à être relativement simple d'emploi. C'est donc un compromis entre une réalité qu'on veut modéliser convenablement et modèle exploitable, donc simple. On choisit traditionnellement un ellipsoïde de révolution aplati aux pôles, de demi-grand axe 6378 km et de demi-petit axe, 6356 km (I.4). La surface topographique s'écarte de quelques kilomètres au plus de l'ellipsoïde.

Pour ce qui concerne la composante altitude, on introduit une surface complémentaire, appelée géoïde, qui intervient naturellement dans l'expression des altitudes : l'eau coule entre deux points d'altitudes différentes ;

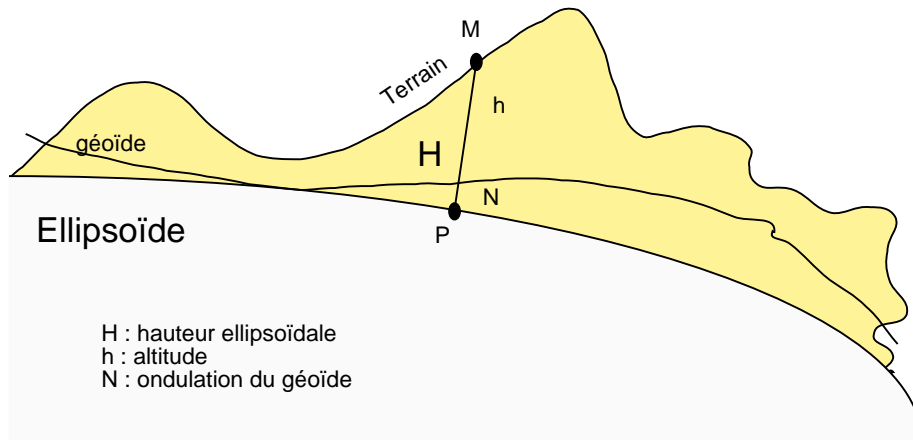


FIG. I.3: L'ellipsoïde et le géoïde

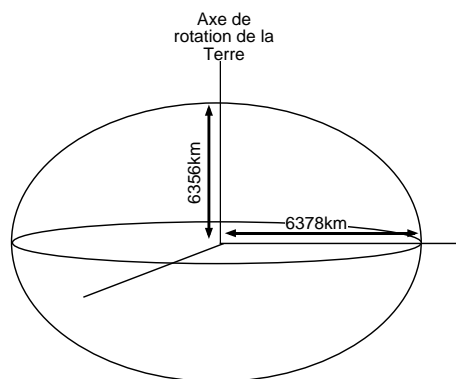


FIG. I.4: L'ellipsoïde

sur le géoïde, tous les points ont une altitude nulle et l'eau ne coule pas. On emploie fréquemment l'image de la mer : en première approximation, le niveau moyen de la mer correspond au géoïde terrestre, c'est-à-dire une surface où l'eau ne coule pas.

Revenons à l'ellipsoïde. L'ellipsoïde permet de repérer les points de la surface de la Terre comme s'ils se situaient sur l'ellipsoïde. Pour être plus précis, à tout point M de la surface terrestre, on associe l'unique point P situé sur l'ellipsoïde et la droite verticale passant par M (figure I.3). Une fois cette opération effectuée, l'utilisation d'un ellipsoïde permet de définir deux angles qui caractérisent de façon unique la position de P (donc de M) sur l'ellipsoïde. Ces deux angles sont appelés latitude (φ) et longitude (λ). Pour une visualisation de ces angles, on se reportera à la figure I.1. Ces deux angles jouent un rôle très important car ils permettent une description complète de l'ensemble des points de l'ellipsoïde. Une représentation plane de la Terre est désormais possible en faisant correspondre un point de coordonnées (λ, φ) à un point de coordonnées (X, Y) dans le plan.

Là encore, le choix de l'ellipsoïde est de nature essentiellement conventionnelle. Un grand nombre d'ellipsoïdes ont été utilisés. L'ellipsoïde utilisé en France est l'ellipsoïde de Clarke 1880, dont les paramètres sont :

$$\begin{cases} a = 6378249.2m \\ b = 6356515.0m \end{cases}$$

Il existe bien d'autres ellipsoïdes. On peut citer par exemple, l'ellipsoïde associé au système mondial WGS84, dont les paramètres sont :

$$\begin{cases} a = 6378135.0m \\ b = 6356750.52m \end{cases}$$

3. La projection cartographique

La carte est un objet plan. La représentation d'une partie de la Terre sur une carte nécessite l'adoption d'une transformation permettant de passer de l'ellipsoïde à un plan. Mathématiquement, il s'agit de donner un couple de fonctions (f, g)

$$\begin{cases} X = f(\varphi, \lambda) \\ Y = g(\varphi, \lambda) \end{cases}$$

qui permet de passer des coordonnées géographiques (φ, λ) aux coordonnées planes (X, Y) .

Le choix de cette projection est purement conventionnel. Il répond cependant à quelques critères. Pour la cartographie d'usage national, il s'agit

essentiellement de limiter les déformations du territoires, de façon à permettre la mesure directe sur la carte des longueurs et surfaces. Comme on l'a vu dans le premier chapitre, aucune projection ne conserve les propriétés métriques de l'ellipsoïde (l'ellipsoïde n'est pas une surface développable). De sorte que le choix de la projection repose sur l'optimisation des propriétés métriques pour le territoire traité.

En France, la projection nationale est une combinaison de projections coniques conformes de Lambert. Il s'agit de trois projections pour la métropole, plus une quatrième pour la Corse. La France est ainsi découpée afin de réduire l'altération linéaire. Avec cet ensemble de zones de projection, l'altération des longueurs est inférieure à 0.015%. La table I.1 donne l'ensemble des paramètres caractérisant ce jeu de projections. Pour l'usage de ces paramètres, les lecteur est invité à se reporter au chapitre II.

Projection	Lambert I	Lambert II	Lambert III	Lambert IV	Lambert 93
φ_1	56 gr	53 gr	50 gr	47.52 gr	49°
φ_2	54 gr	51 gr	48 gr	46.18 gr	44°
λ_0	2.34°	2.34°	2.34°	2.34°	2.34°
X_0	600000 m	600000 m	600000 m	0	700000 m
Y_0	1200000 m	2200000 m	3200000 m	400000 m	6600000 m
φ_{max}		53.5 gr	50.5 gr		
φ_{min}	53.5 gr	50.5 gr			

TAB. I.1: Projection Lambert en France : paramètres de la projection ; φ_1 et φ_2 sont les parallèles automécoïques (d'échelle 1), λ_0 le méridien origine, X_0 , Y_0 les origines des coordonnées planes et $[\varphi_{min}, \varphi_{max}]$ est l'intervalle de validité de la projection

Les coordonnées résultant de la projection sont visibles sur les amorces de cartes topographiques de l'IGN. Par exemple, la figure I.5 montre une portion du territoire située en zone Lambert III. Deux éléments permettent d'identifier la zone : d'une part, par un choix judicieux de constantes d'origine, le premier chiffre de la coordonnée Y indique le numéro de la zone Lambert dans laquelle on se situe ; d'autre part, le coin supérieur gauche de la carte indique une latitude de 50.0 gr , donc situé dans la zone Lambert III.

Les figures I.6 et I.5 montrent quelques indications de référentiel portées sur la carte topographique. Ces indications concernent la projection utilisée, ainsi que l'ellipsoïde (Projection conique conforme de Lambert, ellipsoïde de Clarke 1880 – figure I.5). On trouve aussi une explication re-

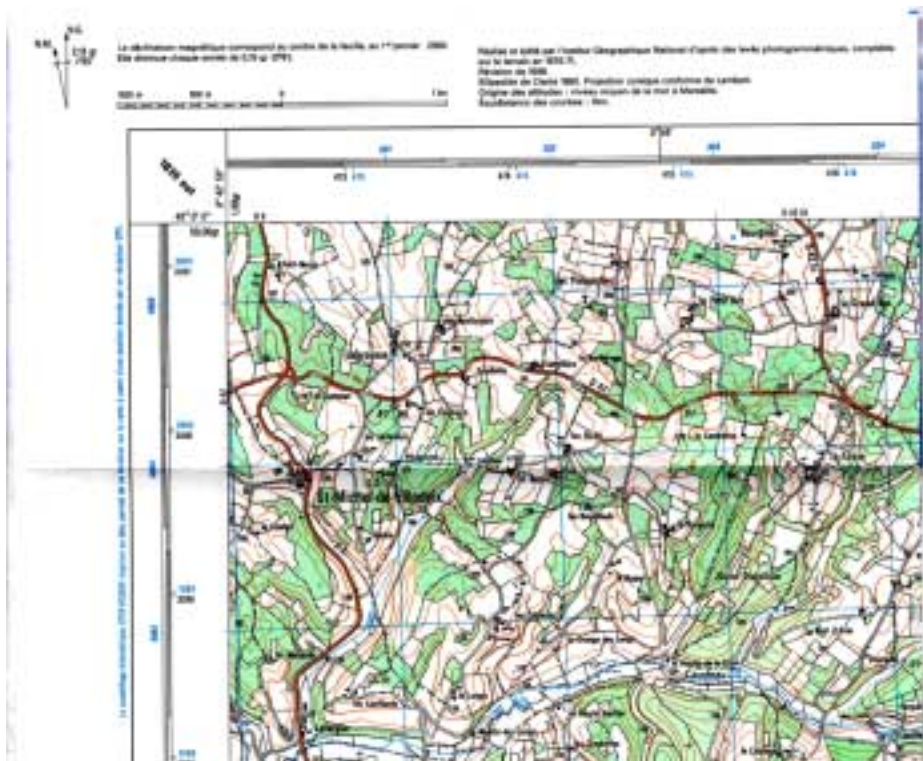


FIG. I.5: Un extrait de la carte numéro 1935 ouest de l'IGN

lative aux amorces (les quadrillages parallèles au bord des cartes). Les amorces internes noires se rapportent à la projection effective de la carte (Lambert III). Toutes les autres amorces sont des surcharges permettant de se repérer dans d'autres référentiels géographiques.

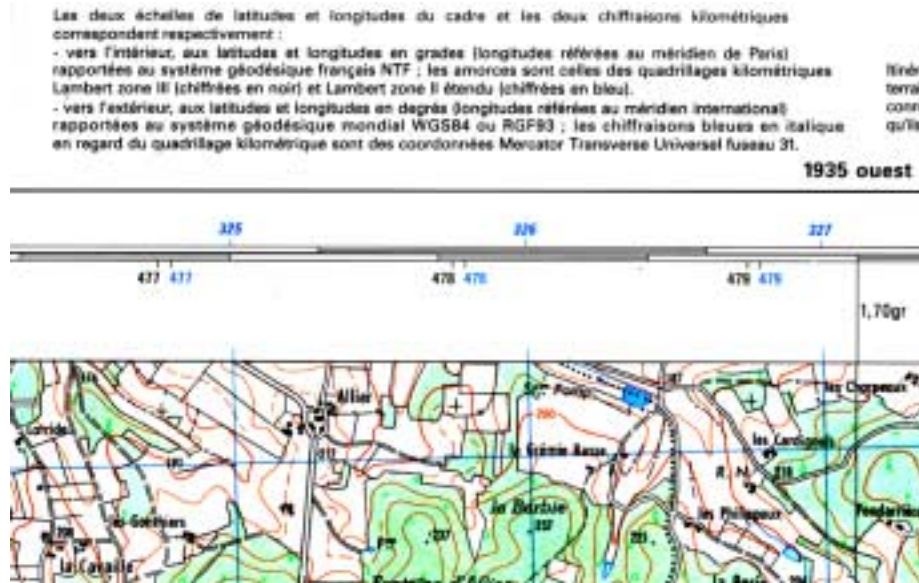


FIG. I.6: Quelques indications de référentiel portées sur la carte numéro 1935 ouest de l'IGN

Déformations La sphère, comme l'ellipsoïde, est une surface non développable. Ceci implique qu'une projection de cette surface sur un plan déforme la réalité. En termes plus mathématiques, il n'est pas possible de construire une projection qui conserve à la fois les angles et les surfaces. Par contre, il est possible de construire des projections conservant les angles (projections conformes) ou les surfaces (projections équivalentes). D'autres projections dépourvues de propriétés globales, appelées projections aphylactiques par opposition aux projections conformes ou équivalentes, existent également.

La propriété de conformité est une propriété locale : un azimut mesuré sur la carte sera conservé sur le terrain. Par contre, si on vise un détail du terrain situé à une distance non nulle du point de visé, cette visée épouse la ligne la plus courte sur le terrain. Cette ligne n'est généralement pas une droite en projection. De sorte que l'azimut sur la carte ne se rapporte pas à la droite joignant les homologues des points de visé en projection.

La propriété d'équivalence est une propriété globale, au sens où elle s'étend à l'intégralité de la représentation cartographique : un continent

a la même surface en projection que dans la réalité.

Afin de visualiser les déformations induites par la projection, Tissot a proposé de travailler à partir d'un cercle tracé sur la surface terrestre et d'étudier son homologue en projection (figure I.7). Dans le cas général, le cercle est transformé en une ellipse. Dans le cas où la projection est conforme, l'ellipse transformée est un cercle. Dans le cas où la projection est équivalente, l'ellipse transformée est de même surface que le cercle initial. On appelle cet outil l'indicatrice de Tissot.



FIG. I.7: L'indicatrice de Tissot

Pour une description mathématique des concepts précédents, le lecteur est invité à se reporter au paragraphe A.

CHAPITRE II

LES PROJECTIONS SOUS TOUS LES ANGLES

Il est d'usage de classer les projections en référence à des figures géométriques qui ont inspiré leur construction. En réalité, l'image géométrique est souvent trompeuse par rapport à la réalité de la transformation mathématique qui permet de passer de la surface terrestre au plan. Le terme de « projection » est d'ailleurs lui-même inadéquat dans bon nombre de cas, puisqu'il suppose l'existence d'un centre de projection ou d'un axe. La plupart des transformations ne possèdent pas de cette propriété. C'est pourquoi, dans un langage rigoureux, on substitue volontiers le terme de « transformation plane » à celui de « projection cartographique ».

Ce chapitre présente les grandes classes de projection utilisées couramment. Pour chaque projection, on donnera une formule générale sur la sphère, un tracé de la surface terrestre et la figure géométrique ayant inspiré la construction de la projection.

Enfin, le dernier paragraphe est consacré au tracé des planisphères.

1. Les projections azimutales

Ces projections sont des projections au sens mathématique du terme : elles possèdent un centre de projection¹. La projection s'opère sur un plan tangent à la surface terrestre. Lorsque le point de tangence est le pôle terrestre, les parallèles apparaissent en projection sous forme de cercles concentriques, et les méridiens, sous forme de droites. Plus généralement, lorsque la surface terrestre est sphérique, la famille des grands cercles passant par le point de tangence devient dans le plan l'ensemble des droites passant par l'homologue du point en projection. Cette propriété rend très utile ces projections pour la navigation (cf. chapitre III).

¹Excepté la projection azimutale équidistante

1.1. La projection gnomonique

Il s'agit d'une projection centrale de la surface terrestre sur un plan tangent à l'origine de la projection. Le centre de la projection est le centre de la Terre (cf. figure II.1).

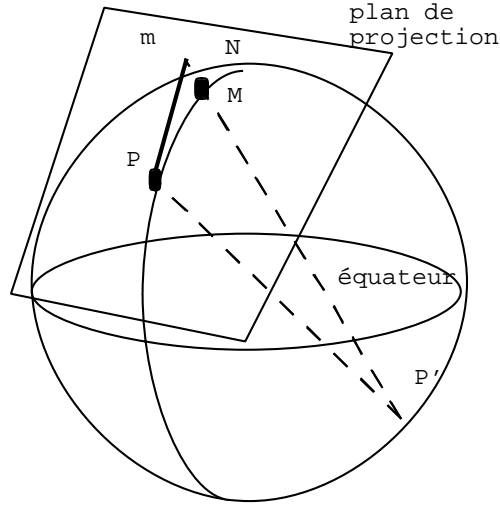


FIG. II.1: Le principe de la projection gnomonique

La formule analytique de la projection sur la sphère est donnée ci-dessous.

$$\begin{cases} X = \frac{\cos\varphi_0 \sin\varphi - \sin\varphi_0 \cos\varphi \cos\Delta\lambda}{\sin\varphi_0 \sin\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos\Delta\lambda} \\ Y = \frac{\cos\varphi \sin\Delta\lambda}{\sin\varphi_0 \sin\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos\Delta\lambda} \end{cases}$$

où $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ et (φ_0, λ_0) représentent les coordonnées géographiques du point de tangence du plan et de la sphère (point P sur la figure II.1). Cette projection n'est ni conforme, ni équivalente. Il y a un seul point sans déformation : le point de tangence.

La figure II.2 donne une représentation de la projection gnomonique pour $\varphi_0 = 90^\circ$. Cette projection est connue depuis l'Antiquité. Elle est aujourd'hui relativement peu utilisée en raison des fortes déformations de la surface terrestre qu'elle génère.

1.2. La projection stéréographique

Le principe de cette projection est le même que précédemment, si ce n'est que le centre de la projection est aux antipodes du point de tangence (cf. figure II.3).

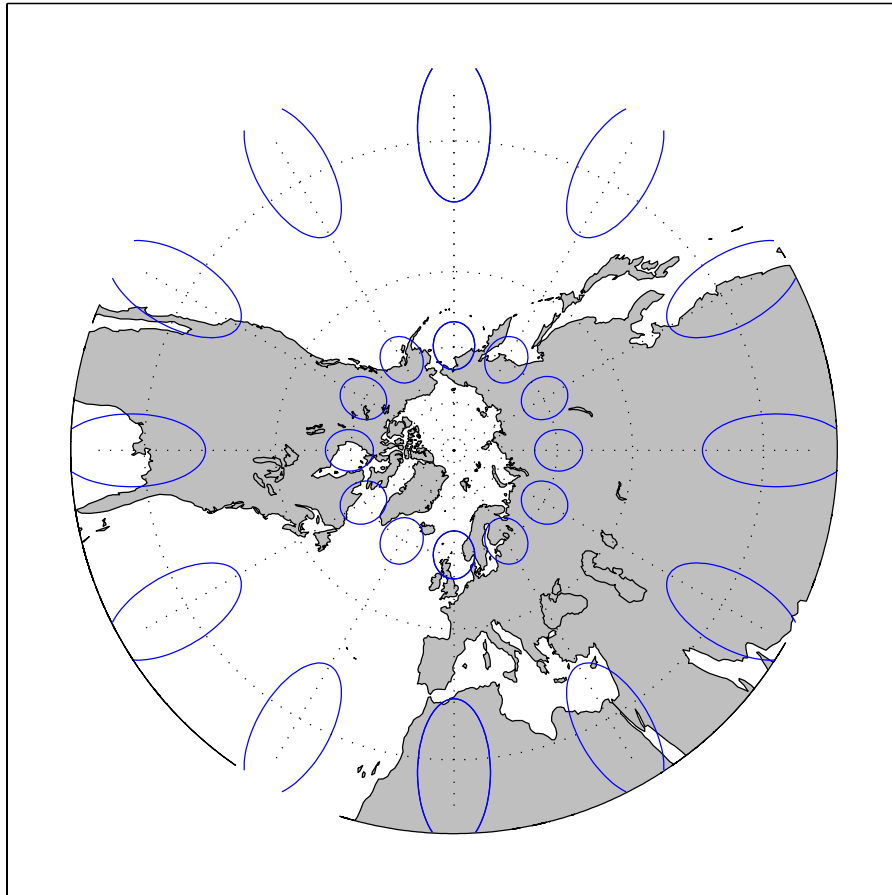


FIG. II.2: Projection gnomonique et indicatrices de Tissot

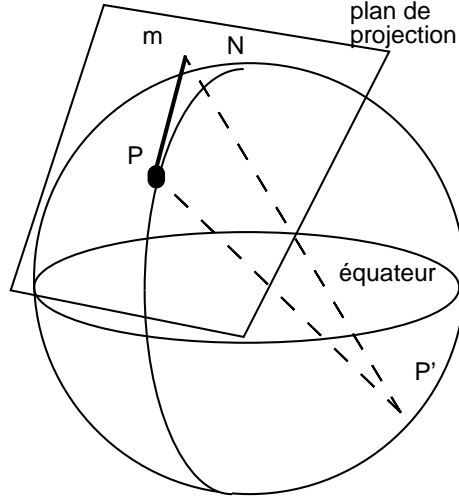


FIG. II.3: Le principe de la projection stéréographique

Les formules de cette projection sont les suivantes :

$$\begin{cases} X = 2 \frac{\cos\varphi_0 \sin\varphi - \sin\varphi_0 \cos\varphi \cos\Delta\lambda}{1 + \sin\varphi_0 \sin\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos\Delta\lambda} \\ Y = \frac{\cos\varphi \sin\Delta\lambda}{1 + \sin\varphi_0 \sin\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos\Delta\lambda} \end{cases}$$

où $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ et (φ_0, λ_0) représentent les coordonnées géographiques du point de tangence du plan et de la sphère (point P sur la figure II.3).

Cette projection est une projection conforme. Une illustration de cette projection est donnée à la figure II.4.

1.3. La projection orthographique

La projection orthographique correspond au même schéma que les deux projection précédentes, à ceci près que le centre de projection est rejeté à l'infini (cf. II.5).

Les équations de cette projection sont les suivantes :

$$\begin{cases} X = \cos\varphi_0 \sin\varphi - \sin\varphi_0 \cos\varphi \cos\Delta\lambda \\ Y = \cos\varphi \sin\Delta\lambda \end{cases}$$

où $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ et (φ_0, λ_0) représentent les coordonnées géographiques du point de tangence du plan et de la sphère (point P sur la figure II.5).

Cette projection ne présente pas de propriété particulière (conformité ou équivalence). Une illustration de cette projection est donnée à la figure II.4.

1.4. La projection azimutale équidistante

Le principe de cette projection est donné à la figure II.7. Il consiste à reporter sur le plan la longueur de l'arc de cercle intersecté par l'angle au

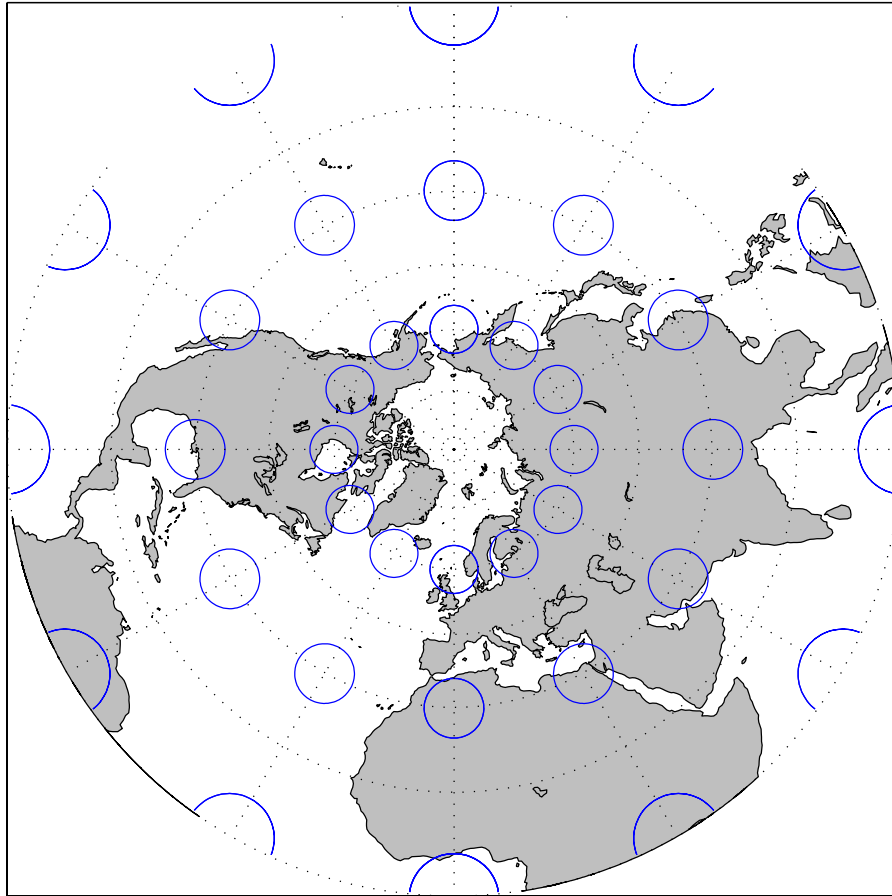


FIG. II.4: Projection stéréographique et indicatrices de Tissot

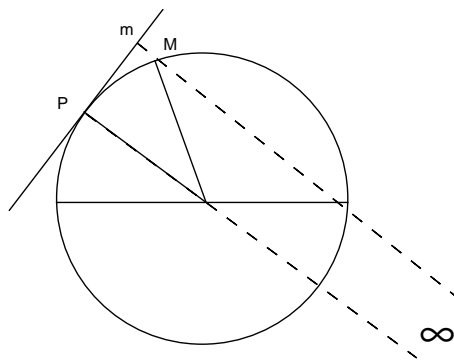


FIG. II.5: Le principe de la projection orthographique

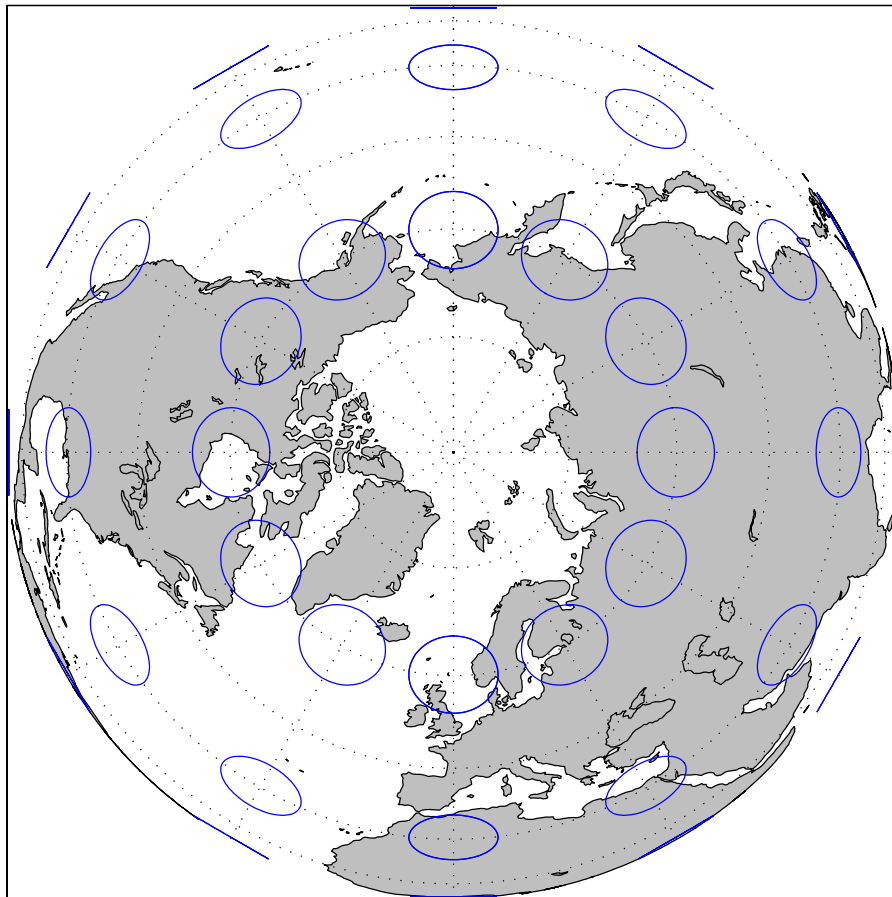


FIG. II.6: Projection orthographique et indicatrices de Tissot

centre entre le point projeté et le point de tangence. Cette représentation n'est pas une projection au sens mathématique du terme.

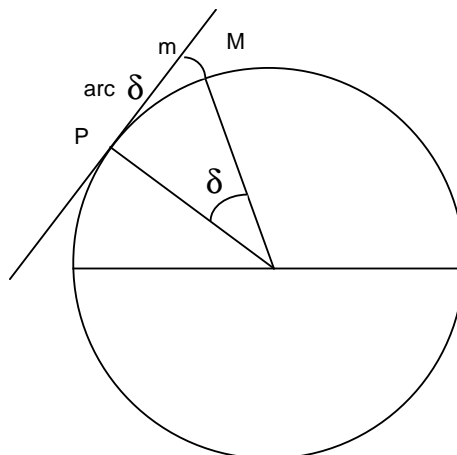


FIG. II.7: Le principe de la projection azimutale équidistante

Elle est particulièrement intéressante pour la navigation : en effet, comme pour toutes les projections azimutales, les grands cercles passant par le point de tangence sont des droites en projection. Les grands cercles sont des géodésiques de la sphère, de sorte que pour aller du point de tangence à un point quelconque de la surface terrestre, le tracé de la ligne de route est, en projection, la droite reliant le point de tangence à la destination. La propriété supplémentaire que vérifie la projection azimutale équidistante est que la distance mesurée le long de cette droite est la distance exacte.

On trouvera à la figure II.8 une illustration de cette projection.

2. Les projections coniques

Comme leur nom l'indique, ces projections correspondent à des applications de la sphère sur un cône sécant ou tangent à la sphère. Le cône étant développable, on peut en faire une représentation plane sans déformation.

La figure II.9 montre le principe général de ces projections. Selon la propriété qu'on voudra voir vérifiée, la projection sera conforme ou équivalente. A noter que la conformité ou l'équivalence de ces projections est maintenue pour une Terre ellipsoïdale, lorsque l'axe du cône est confondu avec l'axe de rotation de la Terre.

Pour toutes les projections coniques, l'expression analytique correspond à une formulation polaire qui correspond au développement du pôle sur le plan :

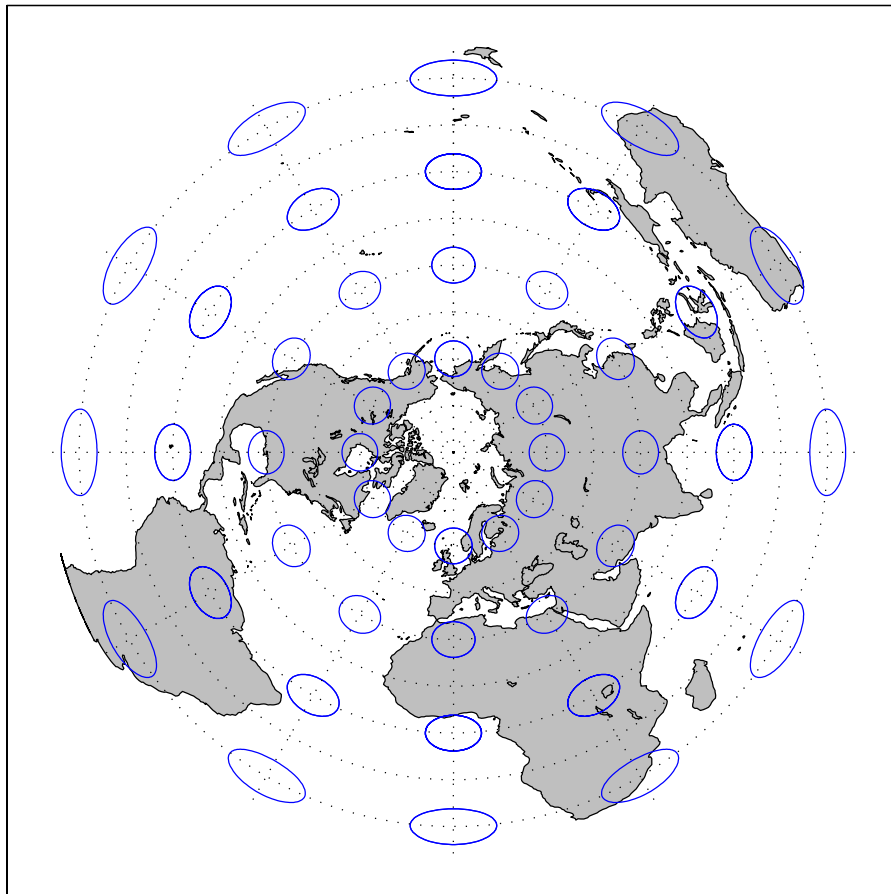


FIG. II.8: Projection azimutale équidistante et indicatrices de Tissot

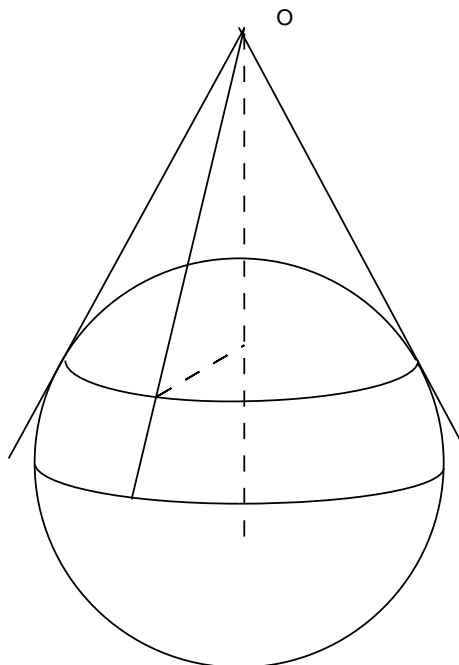


FIG. II.9: Principe des projections coniques

$$X = \rho \sin \theta \quad (\text{II.1})$$

$$Y = \rho_0 - \rho \cos \theta \quad (\text{II.2})$$

où ρ et θ sont des fonctions des coordonnées géographiques.

2.1. Projection de Albers

C'est une projection équivalente. Une illustration de cette projection est donnée à la figure II.10.

Cette projection est très souvent utilisée pour la cartographie à petite échelle des Etats Unis : elle ne déforme pas les surfaces et sur une petite extension, relativement peu les formes.

2.2. Projection conique conforme de Lambert

C'est l'une des projections les plus utilisées. Elle est utilisée en France pour la carte de base de l'IGN. Son utilisation remonte au début du siècle. Le choix qui a été fait se justifie par au moins deux raisons : d'une part son caractère conforme la rendait très appréciable pour les calculs de réduction des observations géodésiques, qui alors étaient menés directement en projection ; , d'autre part, elle occasionne de faibles déformations sur des ter-

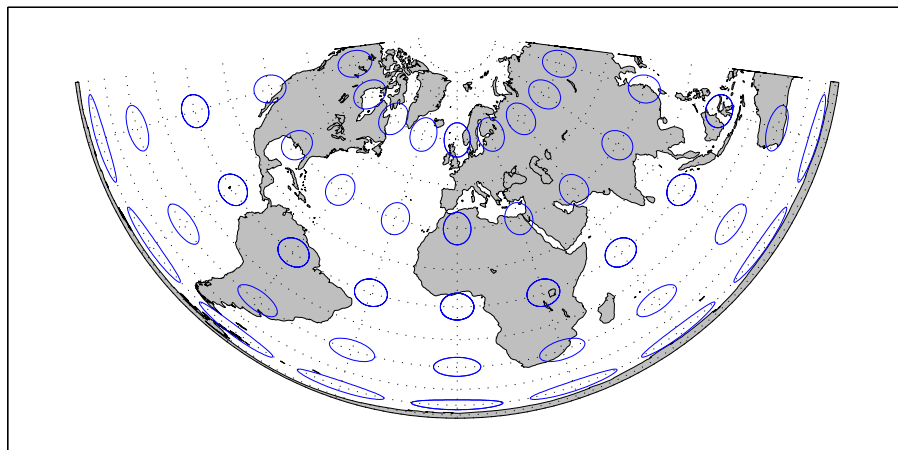


FIG. II.10: Projection de Albers et indicatrices de Tissot

ritoires situés aux moyennes latitudes et relativement symétriques comme la France. On trouvera à la figure II.11 le tracé de l'altération linéaire pour un territoire comme la France (parallèle de tangence $45^\circ \pm 5^\circ$). On constate que cette altération est très faible (inférieure à 0.4%). Elle peut encore être diminuée en norme en adoptant une projection sécante.

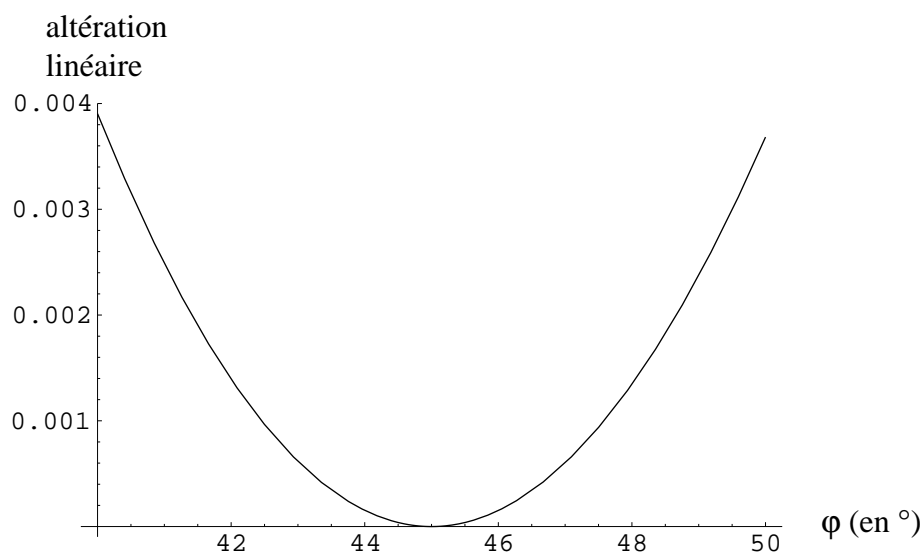


FIG. II.11: Altération linéaire de la projection conique conforme de Lambert

La forme générale des équations de la projection conique conforme est relativement compliquée. Elle est donnée, en référence à la relation II.1,

par :

$$\begin{cases} \rho &= \frac{\cos\varphi_1}{n} \left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \right]^n \\ \theta &= n\lambda \end{cases}$$

où

$$n = \frac{\ln \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}}{\ln \left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)} \right]}$$

φ_1 et φ_2 sont les parallèles où le cône est sécant à la sphère.

La figure II.12 donne une illustration de la projection conique conforme de Lambert.

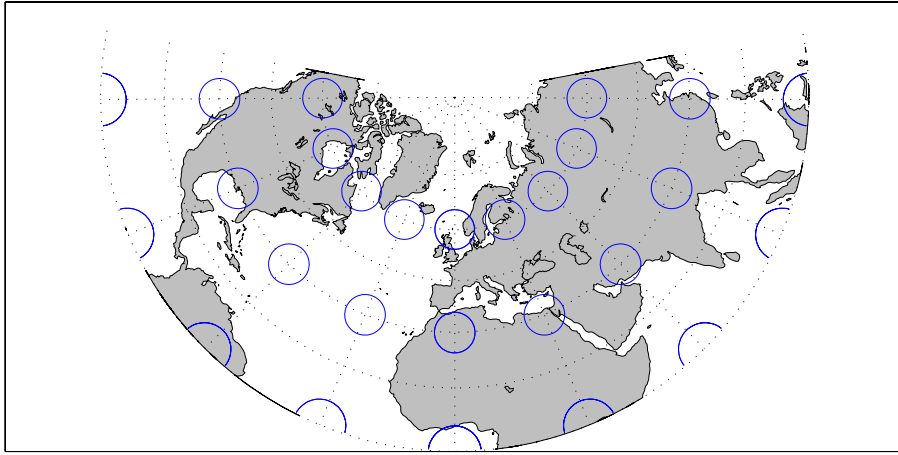


FIG. II.12: Projection conique conforme de Lambert et indicatrices de Tissot

2.3. La projection de Bonne

La projection de Bonne n'est pas rigoureusement une projection conique : les parallèles sont concentriques, mais les méridiens ne sont pas des droites concourantes au pôle. Néanmoins, l'usage la classe dans les projections coniques essentiellement en raison de sa formulation analytique (sous forme polaire). Les équations de cette projection sont les suivantes :

$$\begin{cases} \rho &= \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_0} - (\varphi - \varphi_0) \\ \theta &= \frac{\lambda \cos\varphi}{\rho} \end{cases}$$

Cette projection a été abondamment utilisée durant tout le XIX^{ème} siècle. Elle a servi de support à la « carte d'état-major » du Dépôt de la Guerre, puis du Service Géographique de l'Armée (SGA, précurseur de l'IGN). L'échelle de la carte était le 80 000^{ème}. Cette carte a été remplacée progressivement,

à partir des années 1920 au profit de la carte de base moderne en projection conique conforme de Lambert. On trouvera sa représentation à la figure II.13.

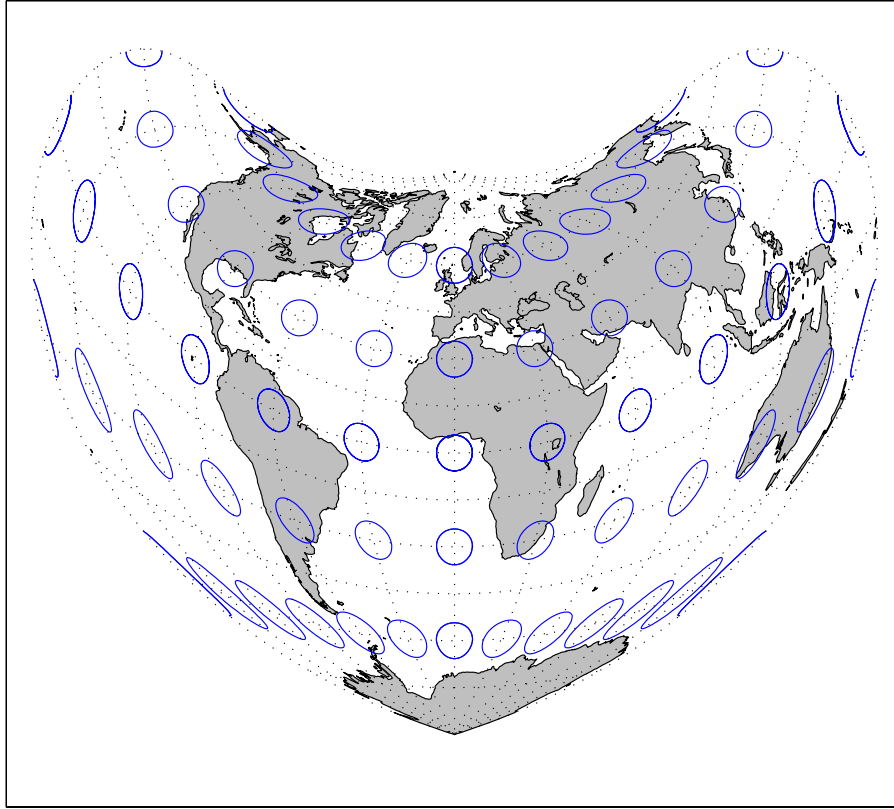


FIG. II.13: Projection de Bonne et indicatrices de Tissot

3. Les projections cylindriques

Comme leur nom l'indique, ces projections correspondent à des applications de la sphère sur un cylindre sécant ou tangent à la sphère. Le cylindre étant développable, on peut en faire une représentation plane sans déformation (cf. figure II.14). Seules les projections transverses permettent de construire des projections conservant, sur l'ellipsoïde, leurs propriétés.

La forme analytique des projection cylindrique directe correspond à :

$$\begin{cases} X = f(\varphi) \\ Y = a\lambda \end{cases}$$

Les parallèles sont des droites parallèles, horizontales dans la projection di-

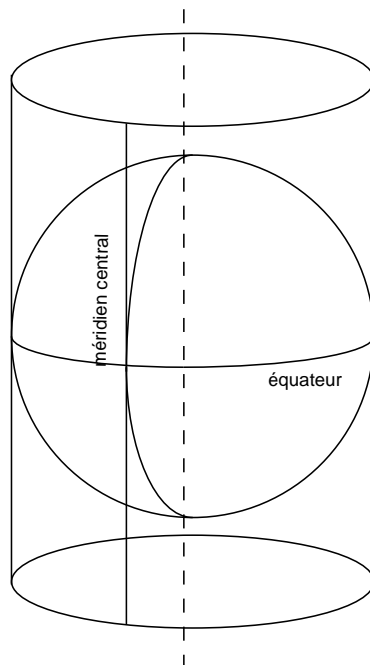


FIG. II.14: Principe des projections cylindriques

recte. La forme analytique de la projection oblique ou transverse est beaucoup plus compliquée.

3.1. Projection cylindrique équivalente de Lambert

Cette projection est étudiée en détail dans le chapitre A. On trouvera son tracé à la figure II.15. Cette projection est parfois employée dans des atlas, en dépit d'une altération linéaire considérable aux hautes latitudes.

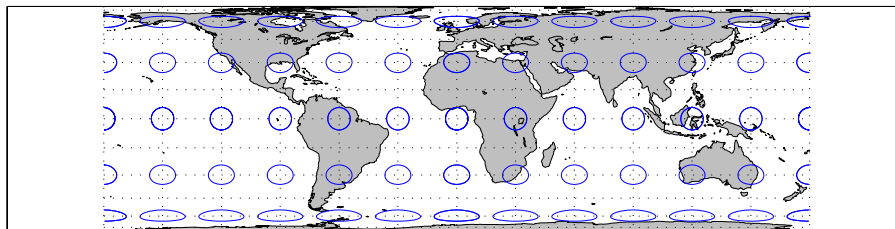


FIG. II.15: Projection cylindrique équivalente de Lambert et indicatrices de Tissot

3.2. Projection de Mercator

Cette projection est étudiée en détail au chapitre A. C'est une projection équivalente. On trouvera son tracé à la figure II.16.

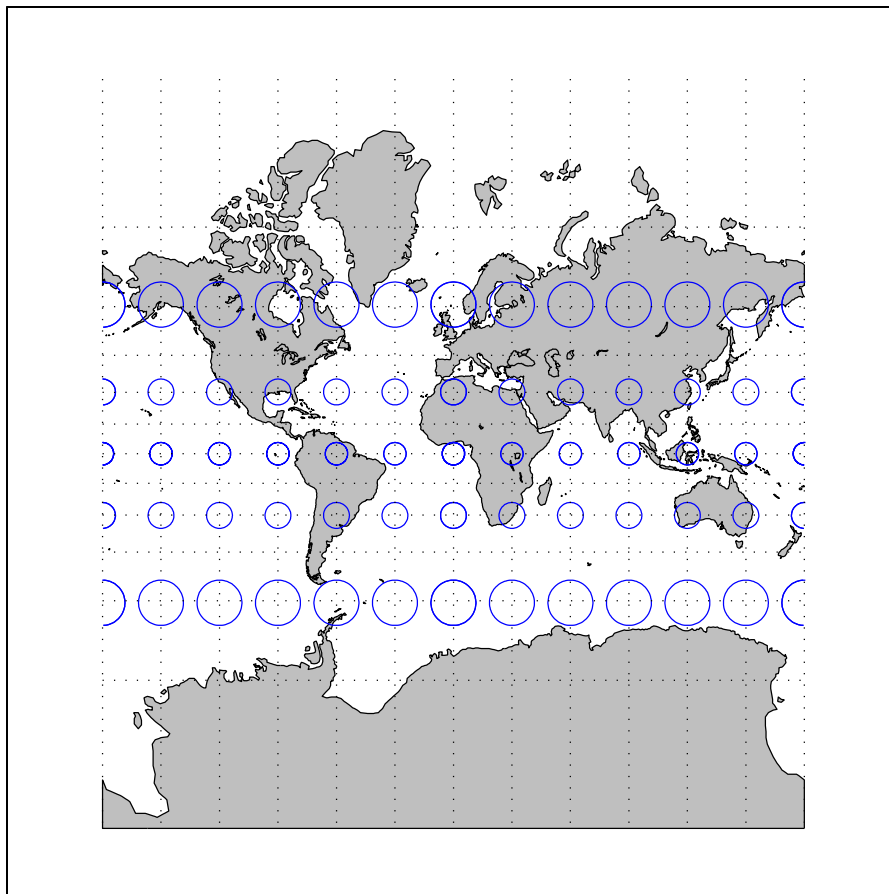


FIG. II.16: Projection cylindrique conforme de Mercator

4. Hors des sentiers battus

Dans ce paragraphe, on étudiera quelques projections couramment employées dans les atlas de géographie. Ces projections ne présentent pas en général, de propriété géométrique particulière : elles ne sont ni conformes, ni équivalentes. Par contre, elles minimisent les déformations (altération linéaires, surfaciques, angulaires) de telle sorte que les grandes formes des continents sont à peu près respectées. Elles concernent principalement le tracé de planisphères, c'est-à-dire la représentation plane de l'intégralité de

la surface terrestre.

4.1. La projection sinusoïdale

Cette projection est aussi appelée projection de Sanson ou encore de Flamsteed. C'est une projection équivalente. Les équations de cette projection sont relativement simples :

$$\begin{cases} X = \lambda \cos \varphi \\ Y = \lambda \end{cases}$$

Comme souvent pour les projection équivalentes, les hautes latitudes sont considérablement déformées. L'équateur est ici la ligne exempte de toute déformation. Cette projection donne de très bons résultats aux latitudes moyennes, ainsi que le montre le tracé des indicatrices de Tissot (figure II.17).

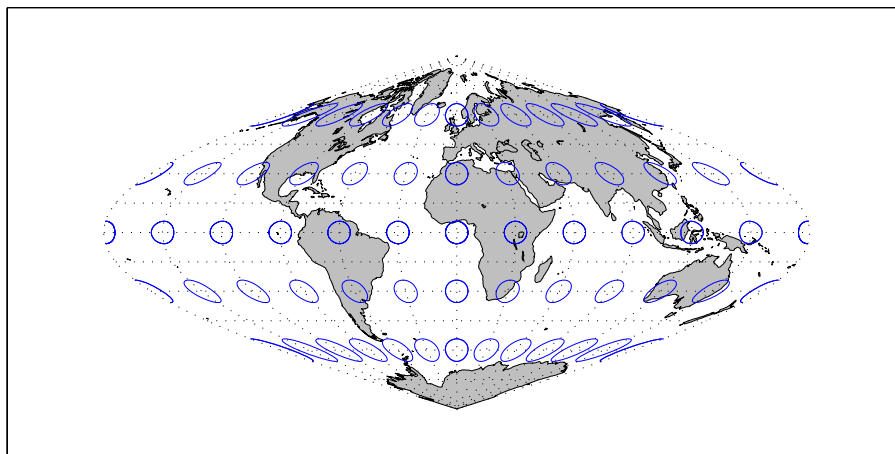


FIG. II.17: Projection sinusoïdale

4.2. La projection de Mollweide

Cette projection est aussi appelée projection homolographique de Babinet. Elle est très utilisée pour le tracé de planisphères. Elle est équivalente et même les régions polaires sont relativement peu déformées, au moins au voisinage du méridien origine. Cette projection est illustrée à la figure II.18.

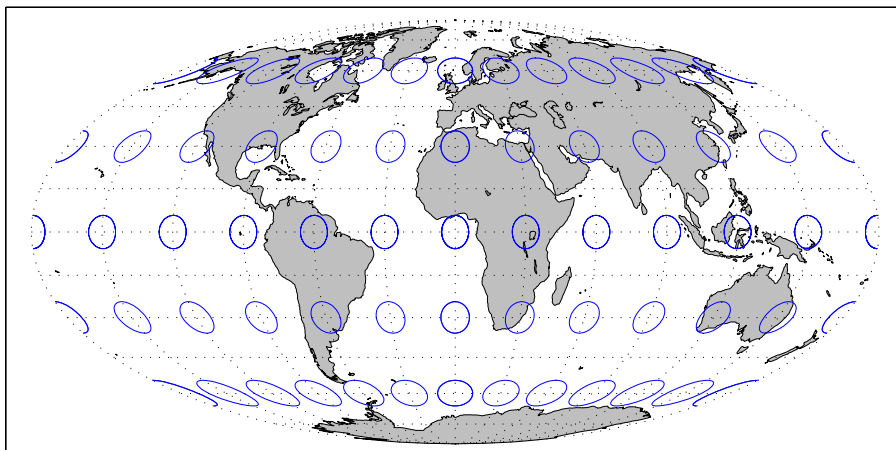


FIG. II.18: Projection de Mollweide

4.3. La projection de Hammer-Aïtoff

C'est une projection équivalente qui est elle aussi très souvent utilisée pour les planisphères. Les formules de cette projection sont les suivantes :

$$\begin{cases} X = 2\sqrt{2} \frac{\cos\varphi \sin\frac{\lambda}{2}}{\sqrt{1+\cos\varphi \cos\frac{\lambda}{2}}} \\ Y = \sqrt{2} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+\cos\varphi \cos\frac{\lambda}{2}}} \end{cases}$$

Une illustration de cette projection est donnée à la figure II.19.

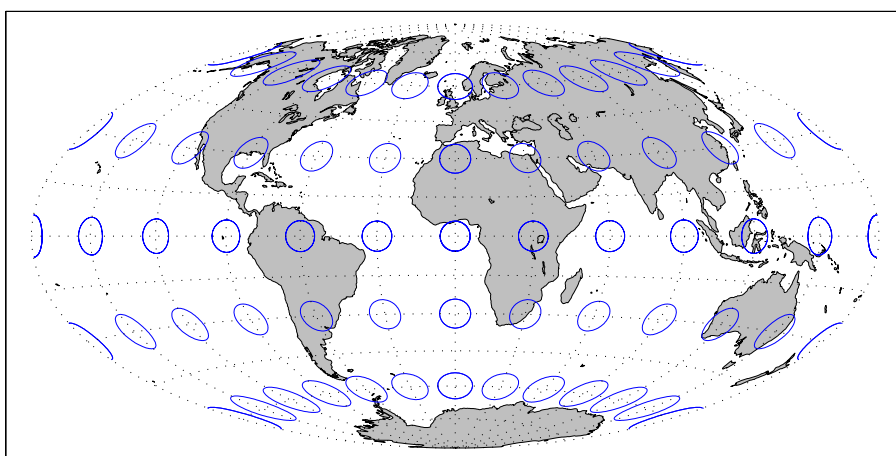


FIG. II.19: Projection de Hammer-Aïtoff

4.4. Les projections de type Eckert

Max Eckert a conçu un certain nombre de projections relativement adaptées à la représentation des planisphères. On présente ici la projection de Eckert IV qui est très intéressante dans le sens où elle a été optimisée pour minimiser les distorsions sur l'ensemble du globe. Du coup, les régions équatoriales sont légèrement étirées dans le sens nord-sud, mais la proportion avec les régions polaires est relativement bien respectée. Une représentation est donnée à la figure II.20. La conception de cette projection remonte à 1906.

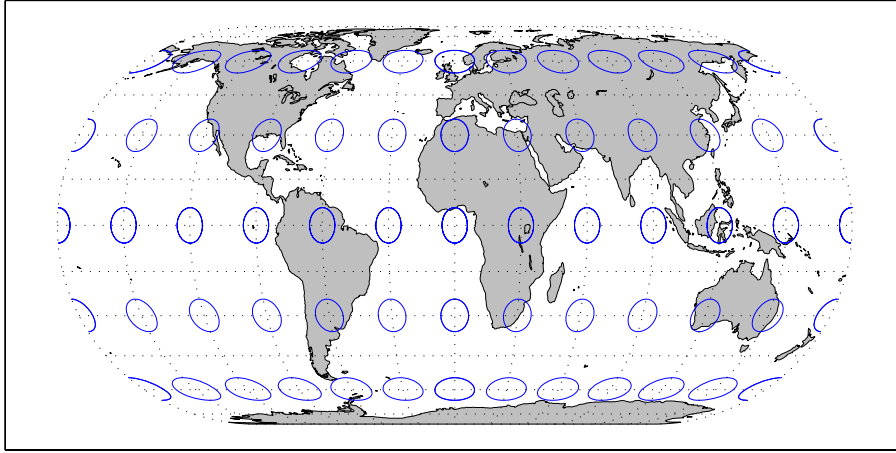


FIG. II.20: Projection de Eckert IV

La projection suivante (Eckert II) est aussi l'œuvre de Max Eckert. Elle est présentée ici à titre de curiosité car elle est très peu employée. On en propose une représentation graphique à la figure II.21. Elle offre la particularité de représenter les méridiens sous forme de deux demi-droites sécantes à l'équateur. Cette propriété se retrouve aisément dans la formulation de la projection en raison des valeurs absolues de φ . Sur un plan pratique, cette projection est équivalente et présente une déformation assez faible aux pôles et à l'équateur. Par contre, sa forme peut dérouter et la rupture graphique qu'elle occasionne au niveau de l'équateur peut être dissuasive. Les équations de cette projection sont les suivantes :

$$\begin{cases} X = 2\lambda \sqrt{\frac{4 - 3\sin|\varphi|}{6\pi}} \\ Y = 2\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{\varphi}{|\varphi|} (2 - \sqrt{4 - 3\sin|\varphi|}) \end{cases}$$

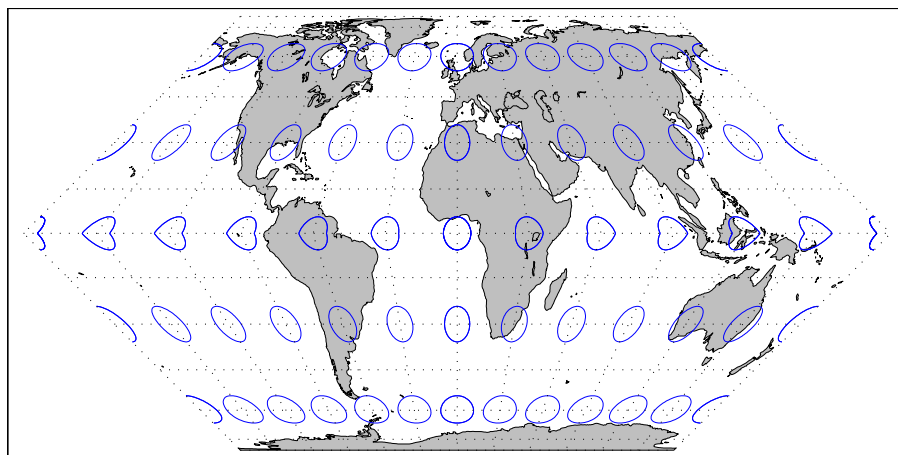


FIG. II.21: Projection de Eckert II

CHAPITRE III

QUELQUES PROBLÈMES LIÉS À L'USAGE DE PROJECTIONS ET DES SYSTÈMES GÉODÉSQUES

1. Le problème de la navigation

Le navigateur a pour souci principal de rallier deux points de la surface terrestre par le plus court chemin qui les sépare. Le plus court chemin est appelé une géodésique. C'est une ligne caractéristique de la surface sur laquelle elle est tracée (i.e. son équation est indépendante des coordonnées avec lesquelles on décrit cette surface). La détermination des géodésiques est un problème classique, mais néanmoins délicat de la géométrie différentielle. Dans le cas d'une sphère, le plus court chemin pour rallier deux points est un arc de grand cercle. Si A et B sont deux points d'une sphère, il existe un unique grand cercle (cercle centré au centre de la sphère) qui passe par les deux points. Le plus court chemin est l'arc le plus court de ce grand cercle d'extrémités les deux points considérés (cf. figure III.1).

On peut chercher une projection qui, au départ de Paris par exemple, donne à partir d'un tracé simple des géodésiques, accès aux trajectoires optimales, ainsi qu'aux distances au départ de Paris.

A proprement parler, ce problème n'exige pas la conformité de la projection, mais plutôt un compromis entre le respect du module linéaire sur certains axes privilégiés de la projection et l'azimut au départ du trajet. Ce problème trouve sa résolution dans l'usage d'une projection azimutale équidistante de point de tangence le point de départ du trajet. En effet, la projection azimutale transforme les grands cercles passant par le point de tangence en droites concourantes. Le tracé d'une géodésique en projection est une droite passant par le centre de la carte (homologue du point de tangence). Puis, la projection azimutale équidistante donne accès aux

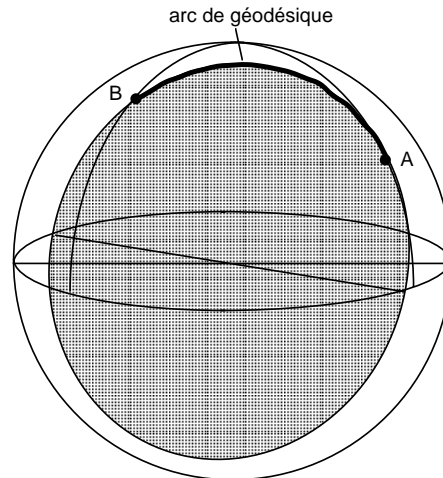


FIG. III.1: La ligne géodésique sur une sphère est un arc de grand cercle

distances vraies le long des grands cercles. D'où le choix de cette projection pour optimiser des trajets.

Cette propriété des projection azimutales équidistantes a été exploitée dans le passé : dans tous les aéroports internationaux était tracée une carte du monde en projection azimutale équidistante, à l'époque où la navigation ne bénéficiait pas de techniques satellitaires ou radar. L'important dans ce cas était de savoir quelles régions on devait survoler.

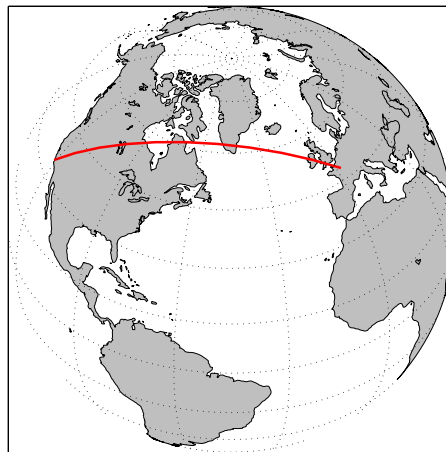


FIG. III.2: Géodésique Paris-San Francisco tracée sur la sphère

On trouvera à la figure III.2 le tracé de la géodésique Paris-San Francisco sur la sphère, et son homologue, en projection azimutale équidistante

tangente à Paris, à la figure III.3.

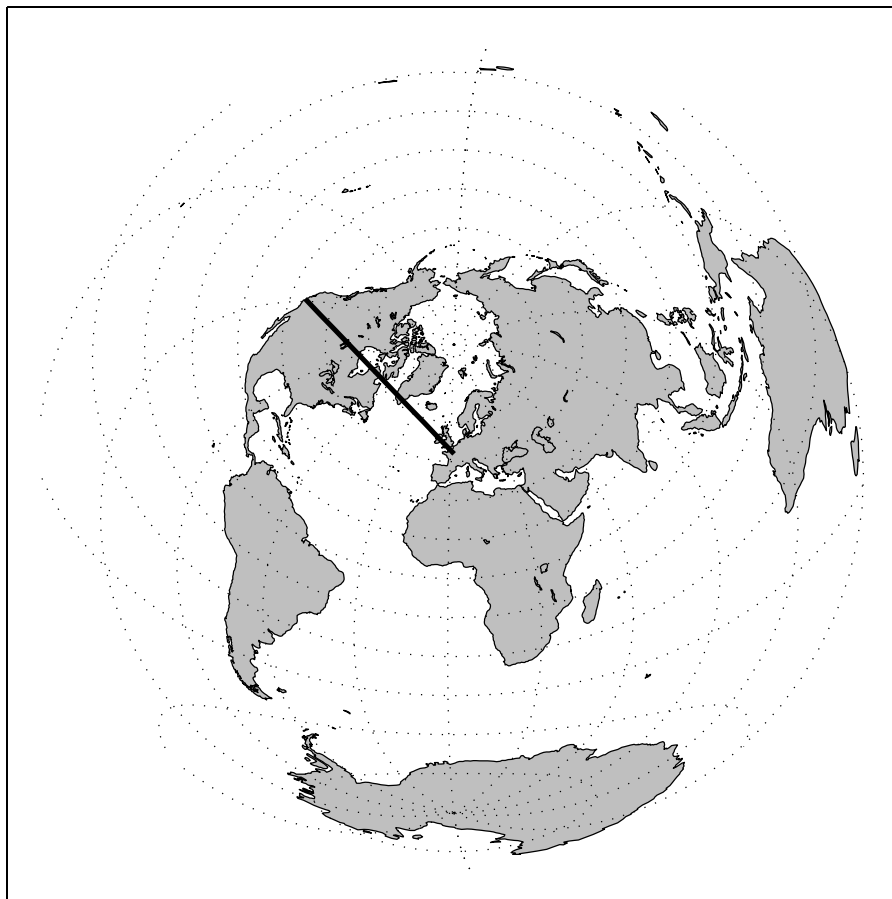


FIG. III.3: Projection azimutale équidistante tangente à Paris et géodésique Paris-San Francisco

2. La représentation de la Terre

Une projection occasionne toujours des déformations de la réalité. Dans le cas des représentations globales de la Terre (les planisphères, cartes où est représenté l'ensemble du globe terrestre), ces déformations rendent parfois la carte impropre à l'exploitation que l'on pourrait en faire. Par exemple, une déformation infinie aux pôles comme celle produite par la projection directe de Mercator rend totalement impropre cette projection à l'analyse dans les régions polaires. Pour être plus complet, dans la projection de mercator, le Groënland (2,2 millions de km²) est représenté avec une superficie en projection identique à celle de l'Amérique du sud (18 mil-

lions de km^2) ou même l'Afrique (30 millions de km^2). Cette projection est donc désormais peu utilisée pour représenter des régions très étendues en latitudes. On lui préférera généralement des projection équivalentes. Néanmoins, les projections équivalentes peuvent elles-aussi occasionner des déformations considérables. La projections équivalente de Lambert fausse totalement les angles au voisinage du pôle : les méridiens qui devraient s'y couper sont parallèles. Il est donc exclu d'analyser ces éléments au pôle. Des projections aphyllactiques (sans propriété géométrique particulière) sont souvent privilégiés car parmi ces projections, on peut en trouver qui offrent un bon compromis entre les altérations linéaires, angulaires et surfaciques. Par exemple, la projection de Eckert présentée à la figure II4.4. présente des déformations relativement limitées sur l'ensemble de la sphère terrestre.

Les projections les plus utilisées pour les planisphères sont (Reignier, 1957) :

- la projection de Mercator, en dépit des problèmes évoqués plus haut (cf. §II3.2.)
- la projection sinusoïdale (cf. §II4.1.)
- la projection de Mollweide (cf. §II4.2.)
- la projection de Hammer-Aïtoff (cf. §II4.3.)
- les projections de type Eckert (cf. §II4.4.)

Reste que si l'on s'intéresse à une région particulière du globe, on aura généralement intérêt à abandonner les projections précédentes au profit de projections adaptées à la forme et la localisation de la région considérée. Par exemple, pour les régions polaires, relativement symétriques, on utilise en générale des projections azimutales. Pour une région aux latitudes moyennes elle-aussi relativement symétrique, on utilise en général des projections coniques qui conservent le parallèle de tangence. Par les régions équatoriales, les projections cylindriques semblent adaptées.

Le paragraphe suivant traite du cas spécifique d'une cartographie nationale.

3. La cartographie d'un territoire

3.1. Généralités

La cartographie d'un territoire répond en premier lieu à un souci de description géométrique du territoire national. On demande donc en principe à la représentation d'être aussi fidèle que possible à la géométrie du territoire.

Une carte de base repose sur une ossature de points géodésiques dont la position est connue avec une grande précision dans le système de réf-

rence national. Le réseau élaboré lors de la confection de la carte constitue en principe la réalisation primaire du système national. A l'époque où le réseau géodésique était mesuré par triangulation (mesures d'angles au sommet de triangles horizontaux à la surface de la Terre), il était extrêmement commode d'utiliser une projection conforme pour les calculs. L'usage d'une telle projection permettait de reporter en projection les angles mesurés et moyennant une correction liée à la courbure terrestre, de faire les calculs de résolution des triangles en géométrie plane. C'est l'une des raisons principale qui a conduit la majeure partie des pays industrialisés à adopter une projection conforme. Le choix des paramètres de la projection et de la projection elle-même repose quant à lui sur le souhait de limiter les déformations du terrain induites par la projection.

3.2. Le cas de la France

La France a adopté une projection conique conforme d'origine le méridien de Paris. La projection française est en réalité un jeu de projections caractérisé par des zones de validité de chaque projection élémentaire. On se reportera à la table I.1 pour des détails concernant les diverses zones concernées.

La projection conique de Lambert a été retenue en raison de la faible déformation qu'elle engendre de part et d'autre du méridien central, sur un pays comme la France. Par ailleurs, elle couvre une assez grande surface sans occasionner de déformation rédhibitoire : 0.015% au maximum en limite de zone.

3.3. Le cas de la Suisse

La Suisse a adopté une projection de Mercator oblique adaptée à son territoire. C'est une projection conforme.

3.4. Le cas du Royaume-Uni

Le Royaume-Uni a adopté une projection de Mercator transverse. C'est aussi une projection conforme. Ce choix se justifie en raison d'un axe principal d'allongement nord-sud du territoire britannique. Si on souhaite limiter les déformations, il est judicieux d'adopter une représentation qui conserve cet axe exempt de toute déformation. C'est le cas de la projection transverse de Mercator, tangente le long du méridien moyen (Greenwich dans le cas de la Grande Bretagne).

4. Calculs de distance dans les SIG

L'objet de ce paragraphe est de montrer que l'usage des projections peut aussi être un problème pour les système d'information géographique. En dehors des problèmes d'identification des référentiels, une difficulté peut survenir avec le calcul de distances. Imaginons deux points munis de leurs coordonnées en projection, exprimées dans un certain référentiel. La distance exacte séparant ces deux points doit normalement être calculée sur la sphère (ou mieux encore sur l'ellipsoïde). Néanmoins, devant la complexité des algorithmes de calculs de géodésiques, il peut être tentant pour le constructeur du logiciel d'effectuer les calculs en projection.

Généralement cette information n'est pas disponible dans la documentation du logiciel, de sorte que l'utilisateur est livré à lui-même. Le problème réside dans le choix de la projection. Si la projection n'altère pas trop les distances (c'est-à-dire qu'elle est adaptée à la zone traitée), et si la distance entre les deux points considérés n'est pas trop grande, alors la distance calculée en projection sera proche de la valeur exacte. Par contre, si l'utilisateur adopte une projection occasionnant des distorsions importantes, alors le risque est grand d'aboutir à des mesures de distance totalement erronés.

Si le SIG effectue des calculs sur la sphère alors dans tous les cas les calculs sont corrects.

Prenons le cas d'une route fictive tracée entre le sud de l'Espagne et le nord de la Scandinavie. Cette route est une droite tracée en projection Lambert II étendue. Par contre, elle n'est pas une géodésique.

Les deux extrémités ont pour coordonnées :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 = 37.121462^\circ \\ \lambda_1 = -3.058661^\circ \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} \varphi_2 = 67.446186^\circ \\ \lambda_2 = 23.929895^\circ \end{pmatrix}$$

La distance géodésique entre les deux points précédents, calculée sur l'ellipsoïde WGS84 est de 3719km. La distance vraie, c'est à dire calculée sur l'ellipsoïde de la route fictive entre les deux points est de 3739km. Le SIG 1 nous donne une distance de 3839km et le SIG 2 donne une distance de 3850km. Les coordonnées Lambert II des deux points sont :

$$m_1 = \begin{pmatrix} X_1 = 114km \\ Y_1 = 1137km \end{pmatrix} \quad m_2 = \begin{pmatrix} X_2 = 1588km \\ Y_2 = 4694km \end{pmatrix}$$

On voit immédiatement que le SIG 2 fait ses calculs de distances en projection : $distance = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}$. Evidemment ce calcul n'a que peu de sens, mais il se justifie par le fait que les routes que l'on manipule dans les SIG sont en général composées de segments très courts sur lesquels le passage par l'ellipsoïde serait coûteux en temps de calcul et inutile vis-à-vis de la précision des données. Les problèmes surviennent lorsqu'on

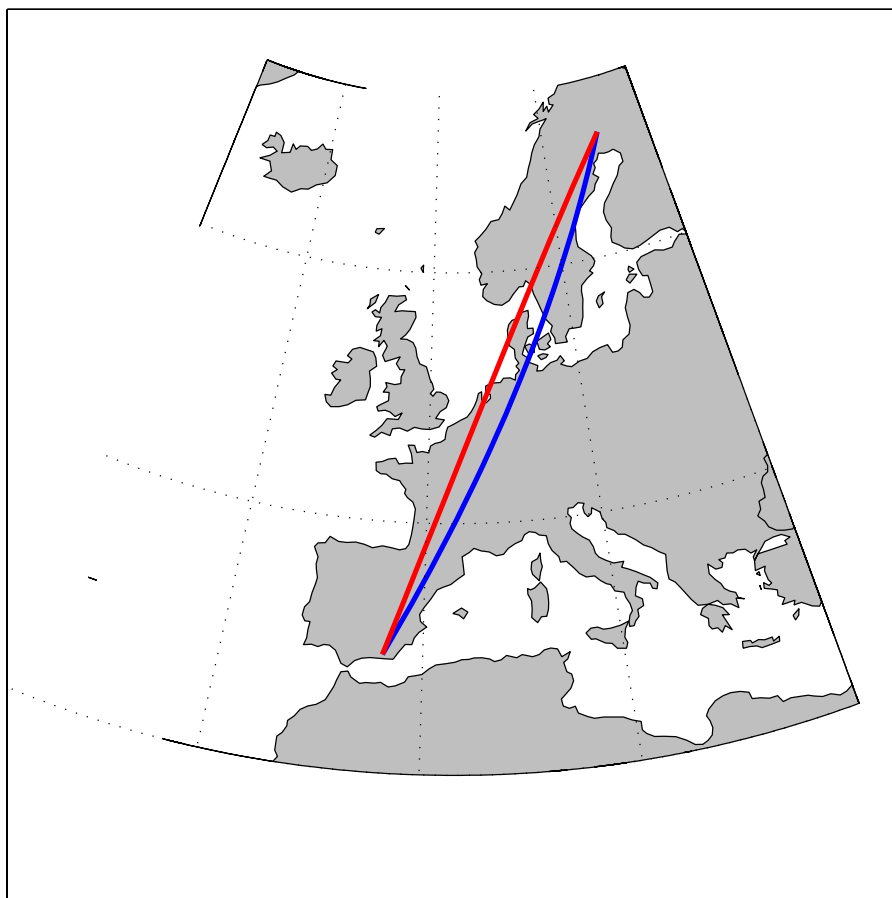


FIG. III.4: Route fictive entre le sud de l'Espagne et le nord la Scandinavie représentée en projection et géodésique

effectue des calculs de distance sur des longs trajets : on additionne des petites erreurs sur chaque segment qui se traduisent par une erreur d'un ordre au moins équivalent à l'exemple précédent (10%). Concrètement, si l'on fait des calculs de trajets sur une base européenne et que les calculs sont directement menés en projection, la longueur du trajet entre le sud de l'Espagne et la Scandinavie sera erronée d'au moins 10%. Quant au SIG 2, on ne sait pas vraiment à quoi correspond la distance calculée. Elle est inférieure à la distance en projection, donc on peut supposer qu'elle relève d'un calcul approché qui tient compte de l'altération linéaire de la projection. Néanmoins, sur de longues distances, le résultat n'est pas probant.

5. Les cartes françaises vues par la projection

La lecture de carte topographique est une activité délicate qui réserve parfois quelques surprises à l'esprit vagabond qui ose s'aventurer dans les amorces des cartes. La feuille de Besançon (3323 E) est à ce titre extrêmement riche. La figure III.5 montre les amorces ainsi que le descriptif de la carte actuelle (éditée en 1999) et de l'édition précédente (éditée en 1988). Entre les deux, l'IGN a décidé de modifier l'une des surcharges correspondant aux coordonnées géographiques en degrés-minutes-secondes. Le référentiel géodésique associé à ces surcharges en 1988 était le système européen unifié (ED50 pour European Datum 1950). En 1999, le référentiel associé est le WGS84. Les deux systèmes de référence sont différents. La transformation correspond à un changement d'origine donné à l'équation III.1.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{WGS84} = \begin{pmatrix} -87m \\ -98m \\ -121m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{ED50} \quad (\text{III.1})$$

On retrouve la signature de ce changement dans les coordonnées géographiques du coin supérieur gauche de la carte, qui sur le terrain correspond rigoureusement au même point : la latitude a changé de 4 secondes de degré (soit environ 120 mètres), et de 3 seconde de degré en longitude (soit environ 90 mètres).

Cette coupure est également intéressante car elle correspond au passage d'une zone UTM dans une autre. Le lecteur est invité à en prendre connaissance.

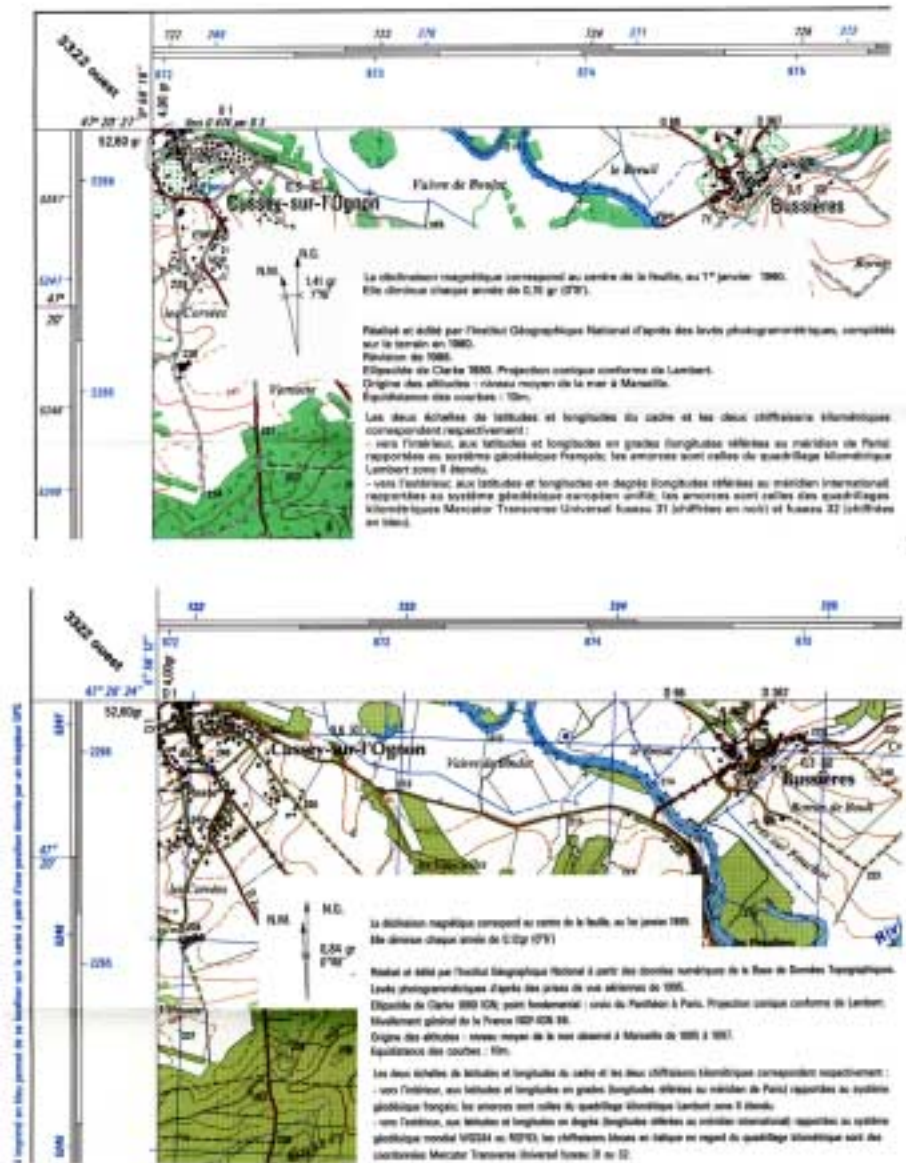


FIG. III.5: Les deux dernières éditions de la coupure 3323 E de la carte topographique de base française (feuille de Besançon)

Annexes

ANNEXE A

PROJECTIONS : QUELQUES IDÉES THÉORIQUES

Mathématiquement, les projections cartographiques sont des applications possédant quelques propriétés métriques que l'on détaillera dans ce chapitre, d'une surface \mathcal{S} sur un plan \mathcal{P} . Généralement, \mathcal{S} sera une approximation de la Terre réelle à partir de laquelle on pourra construire une cartographie bi-univoque de la surface terrestre, souvent appelée surface topographique. Pour la description des projections de ce manuel, on a choisi \mathcal{S} une sphère. En cartographie de précision, \mathcal{S} est un ellipsoïde de révolution aplati aux pôles.

L'axe de révolution est l'axe des z , confondu avec l'axe de rotation de la Terre. L'ellipse méridienne (cf. A.1) a pour demi-grand axe $a = 6378km$ et pour demi-petit axe $b = 6357km$. L'ellipsoïde n'étant qu'une approximation de la surface terrestre, les valeurs de a et b sont conventionnelles et approximatives. *In fine*, la projection dépend aussi du choix de l'ellipsoïde. Il

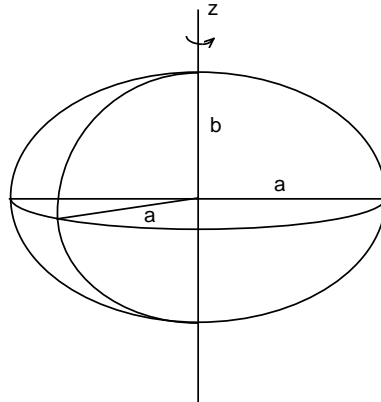
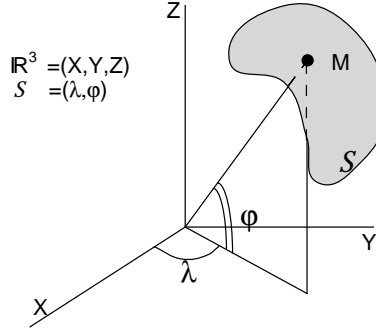
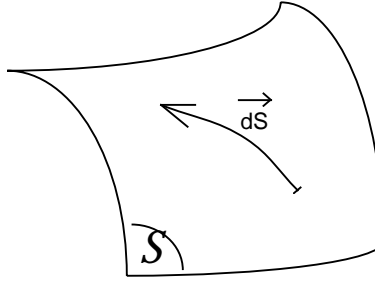


FIG. A.1: L'ellipsoïde de révolution


 FIG. A.2: L'espace \mathbb{R}^3 et la surface \mathcal{S} ; le paramétrage polaire de \mathcal{S}

 FIG. A.3: L'élément de longueur ds^2

convient donc d'intégrer ces paramètres dans l'expression du système de projection cartographique (voir à ce sujet le chapitre I).

Le choix de la surface \mathcal{S} permet de définir un jeu de coordonnées polaires. \mathcal{S} est une surface plongée dans \mathbb{R}^3 . Une surface est, en géométrie riemannienne, une sous-variété de dimension $n - 1$ d'un espace de dimension n . Quand $n = 3$, la sous-variété est une surface.

La géométrie différentielle enseigne qu'une sous-variété est entièrement caractérisée par l'intermédiaire de la première forme quadratique fondamentale, appelée **métrique** en géométrie riemannienne. La métrique correspond au carré d'un élément de longueur de la surface. Sa valeur dépend en général du point considéré et de la direction choisie pour mesurer cette grandeur.

La métrique canonique de \mathbb{R}^3 est

$$\begin{aligned} dS^2 &= dX^2 + dY^2 + dZ^2 \\ &= \begin{pmatrix} dX & dY & dZ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dans l'expression précédente, la métrique est l'identité. L'application

$(M \in \mathbb{R}^3 \mapsto dS^2(M))$ est une forme quadratique. On pourra aussi écrire formellement que $\vec{dS} = dX\vec{u}_X + dY\vec{u}_Y + dZ\vec{u}_Z$, où \vec{u}_X , \vec{u}_Y et \vec{u}_Z sont les vecteurs unitaires des axes X , Y et Z .

Connaissant l'application qui lie (X, Y, Z) à (φ, λ) , on peut en déduire la métrique de \mathcal{S} . On prendra pour \mathcal{S} la sphère de rayon unité.

$$\begin{cases} X = \cos\varphi\cos\lambda \\ Y = \cos\varphi\sin\lambda \\ Z = \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dX = -\sin\varphi\cos\lambda d\varphi - \cos\varphi\sin\lambda d\lambda \\ dY = -\sin\varphi\sin\lambda d\varphi + \cos\varphi\cos\lambda d\lambda \\ dZ = \cos\varphi d\varphi \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

donc

$$\begin{aligned} d\Sigma^2 \equiv dS^2(M \equiv (\varphi, \lambda) \in \mathcal{S}) &= d\varphi^2 + \cos^2\varphi d\lambda^2 \\ &= \begin{pmatrix} d\varphi & d\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La métrique de \mathcal{S} est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\varphi \end{pmatrix}$. Au passage, on note l'expression du lien entre la base canonique de \mathbb{R}^2 et la base associée¹ à \mathcal{S} :

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_X \\ \vec{u}_Y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \vec{u}_\varphi \\ \vec{u}_\lambda \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Dans le cas de la sphère, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm\cos\varphi \end{pmatrix}$.

La carte est une application

$$(\varphi, \lambda) \in \mathcal{S} \xrightarrow{\mathcal{T}} (x, y) \in \mathcal{P} \quad (\text{A.3})$$

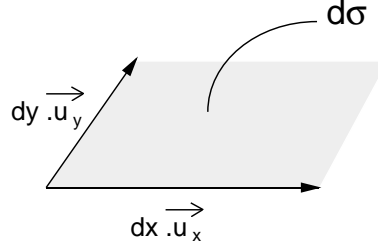
où \mathcal{T} est une projection de \mathcal{S} sur \mathcal{P} . En général, on suppose que \mathcal{T} est un \mathcal{C}^2 -difféomorphisme de \mathcal{S} (éventuellement restreinte à un compact de \mathbb{R}^2). \mathcal{T} est entièrement décrite par la donnée de

$$\begin{cases} x = f(\varphi, \lambda) \\ y = g(\varphi, \lambda) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

La métrique de \mathcal{P} paramétrée en (φ, λ) est déduite de la métrique canonique du plan $ds^2 = dx^2 + dy^2$. En vertu de (A.4),

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \varphi} & \frac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi} & \frac{\partial g}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \end{pmatrix}$$

¹Attention! les expressions A.2 et A.5 sont écrites en **vecteurs** alors que d'habitude, les expressions matricielles se rapportent à des composantes, ce qui suppose le choix d'une base. Ce point est essentiel car si les composantes n'ont rien d'intrinsèque, les vecteurs, eux, le sont.


 FIG. A.4: L'élément de surface $d\sigma^2$

Cette dernière relation s'écrit aussi vectoriellement (cf. aussi Eq. A.2) :

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_x \\ \vec{u}_y \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \vec{u}_\phi \\ \vec{u}_\lambda \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

On note dès à présent la rôle très particulier que jouent les matrices T et J : T caractérise la « forme » (intrinsèque) de la surface \mathcal{S} , et J caractérise la déformation subie par une surface lors de sa projection dans un plan.

La matrice J est la jacobienne de \mathcal{T} . De sorte que²

$$ds^2 = \begin{pmatrix} d\phi & d\lambda \end{pmatrix} J^T J \begin{pmatrix} d\phi \\ d\lambda \end{pmatrix}$$

On définit l'échelle d'une carte par le rapport des deux métriques

$$\varepsilon = \frac{ds}{d\Sigma} \quad (\text{A.6})$$

Cette échelle dépend du lieu considéré (le point de coordonnées (ϕ, λ)), ainsi que de la direction étudiée.

1. Projection équivalentes

L'élément de surface d'un plan est

$$d\sigma = \|dx \, dy \, \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y\|$$

On a vu (Eq. A.2) le lien qui existe entre la base canonique de \mathbb{R}^2 et la base

associée à \mathcal{S} . Or $\begin{pmatrix} dx \vec{u}_x \\ dy \vec{u}_y \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} d\phi \vec{u}_\phi \\ d\lambda \vec{u}_\lambda \end{pmatrix}$, de sorte que

$$\begin{aligned} d\sigma_{\mathcal{S}} &= \|dx \, dy \, \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y\| \\ &= \|d\phi \, d\lambda \cos\phi \, \vec{u}_\phi \wedge \vec{u}_\lambda\| \\ &= |\det T| \cdot \|d\phi \, d\lambda \, \vec{u}_\phi \wedge \vec{u}_\lambda\| \end{aligned}$$

²On remarque au passage que la métrique de la sphère correspond à celle d'un plan paramétré en (ϕ, λ) issu d'une projection où $f(\phi, \lambda) = 1$ et $g(\phi, \lambda) = \lambda|\cos\phi|$. Ce point servira dans la suite de l'exposé.

et de la sphère projetée sur la plan *via* \mathcal{T}

$$\begin{aligned} d\sigma_{\mathcal{P}} &= \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi \cdot \vec{u}_{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} d\lambda \cdot \vec{u}_{\lambda} \right) \wedge \left(\frac{\partial g}{\partial \varphi} d\varphi \cdot \vec{u}_{\varphi} + \frac{\partial g}{\partial \lambda} d\lambda \cdot \vec{u}_{\lambda} \right) \right\| \\ &= \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial g}{\partial \lambda} - \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right) d\varphi \cdot d\lambda \cdot \vec{u}_{\varphi} \wedge \vec{u}_{\lambda} \right\| \\ &= |\det J| |d\varphi \cdot d\lambda \cdot \vec{u}_{\varphi} \wedge \vec{u}_{\lambda}| \end{aligned}$$

On définit le module aréolaire de la projection par :

$$\alpha = \frac{d\sigma_{\mathcal{P}}}{d\sigma_{\mathcal{S}}} = \left| \frac{\det J}{\det T} \right| \quad (\text{A.7})$$

Dans le cas de la sphère,

$$\alpha = \left| \frac{\det J}{\cos \varphi} \right|$$

On dira qu'une projection est équivalente lorsque $\alpha = 1$ en tout point. Dans ce cas, un élément de surface sur la sphère est projeté sur une surface équivalente dans le plan \mathcal{P} . Les aires sont conservées.

Exemple de projection équivalente La condition d'équivalence est $\left| \frac{\det J}{\cos \varphi} \right| = 1$, donc en prenant

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

on obtient une projection équivalente. Cette forme de la jacobienne conduit à une expression de la projection en :

$$\begin{cases} x &= f(\varphi, \lambda) = \lambda \\ y &= g(\varphi, \lambda) = \sin \varphi \end{cases}$$

Cette projection est la projection cylindrique équivalente de Lambert, dont une illustration est donnée à la figure (A.5).

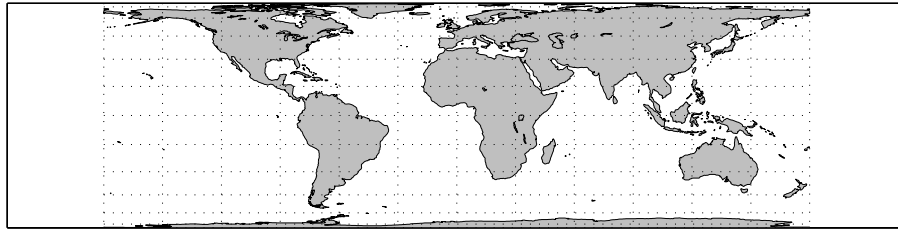


FIG. A.5: Un exemple de projection équivalente : la projection cylindrique équivalente de Lambert

2. Projections conformes

L'angle entre deux vecteurs est directement lié au produit scalaire. Par définition, si \mathcal{S} est un produit scalaire, \mathbf{u} et \mathbf{v} deux vecteurs de l'espace euclidien associé,

$$\mathcal{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})$$

où $\|\cdot\|$ est la norme induite par le produit scalaire (i.e. $\|\mathbf{u}\| = \mathcal{S}(\mathbf{u}, \mathbf{u})^{\infty/\epsilon}$).

Considérons un point de la sphère en lequel sont définis les vecteurs de base $(\vec{u}_\phi, \vec{u}_\lambda)$. Soient deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} de composantes (a_ϕ, a_λ) et (b_ϕ, b_λ) dans la base $(\vec{u}_\phi, \vec{u}_\lambda)$. On a donc

$$\begin{cases} \vec{a} &= a_\phi \vec{u}_\phi + a_\lambda \vec{u}_\lambda \\ \vec{b} &= b_\phi \vec{u}_\phi + b_\lambda \vec{u}_\lambda \end{cases}$$

L'angle de \vec{a} et \vec{b} sur la sphère vérifie par définition

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\begin{pmatrix} a_\phi & a_\lambda \end{pmatrix} T^T T \begin{pmatrix} b_\phi \\ b_\lambda \end{pmatrix}}{\|\vec{a}\|_S \|\vec{b}\|_S}$$

$$\text{où } \|\vec{a}\|_S^2 = \begin{pmatrix} a_\phi & a_\lambda \end{pmatrix} T^T T \begin{pmatrix} a_\phi \\ a_\lambda \end{pmatrix}.$$

Puis, en projection, l'angle entre \vec{a} et \vec{b} devient

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\begin{pmatrix} a_\phi & a_\lambda \end{pmatrix} J^T J \begin{pmatrix} b_\phi \\ b_\lambda \end{pmatrix}}{\|\vec{a}\|_{\mathcal{P}} \|\vec{b}\|_{\mathcal{P}}}$$

$$\text{où } \|\vec{a}\|_{\mathcal{P}}^2 = \begin{pmatrix} a_\phi & a_\lambda \end{pmatrix} J^T J \begin{pmatrix} a_\phi \\ a_\lambda \end{pmatrix}.$$

Les deux angles sont identiques lorsqu'il existe $\xi \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

$$J^T J = \xi T^T T \tag{A.8}$$

Les métriques de la sphère et de la surface projetée sont proportionnelles. Dans ce cas, on dit que la projection est conforme.

Exemple de projection conforme Dans le cas de la sphère, $T^T T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \phi \end{pmatrix}$. La projection est donc conforme par exemple lorsque

$$J^T J = \frac{1}{\cos^2 \phi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\cos^2 \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si on suppose que f est une fonction de φ seulement et g une fonction de λ seulement, alors les termes croisés de $J^T J$ sont nuls et

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)^2 &= \frac{1}{\cos^2 \varphi} \\ \left(\frac{\partial g}{\partial \lambda} \right)^2 &= 1 \end{cases}$$

donc par exemple

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \frac{1}{\cos \varphi} \\ \frac{\partial g}{\partial \lambda} &= 1 \end{cases}$$

Sans développer les calculs, on montre qu'une primitive de $1/\cos \varphi$ est donnée par

$$\int \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi = \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right]$$

de sorte que la projection définie par

$$\begin{cases} f(\varphi, \lambda) &= \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \\ g(\varphi, \lambda) &= \lambda \end{cases}$$

est une projection conforme. C'est la projection cylindrique conforme de Mercator, dont une représentation est donnée à la figure A.6. Il faut noter que la projection n'est pas définie aux pôles et que la représentation doit être tronquée au voisinage de $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$.

3. Représentation des déformations : indicatrice de Tissot

Dans une base orthonormale, le produit scalaire prend la forme d'une identité. Dans le cas de la surface \mathcal{S} , la diagonalisation de $T^T T$ correspond à l'usage de la base canonique (\vec{u}_x, \vec{u}_y) . Considérons dans cette base la courbe paramétrée

$$M(t)_{t \in \mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Cette courbe est un cercle tracé sur la surface \mathcal{S} . Dans la base $(\vec{u}_\varphi, \vec{u}_\lambda)$, elle à une équation de la forme

$$M_{loc}(t) = T^{-1} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Par projection, Cette courbe est transformée en une courbe d'équation, dans une base orthonormale (la base canonique de \mathbb{R}^2) en

$$N(t) = J T^{-1} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

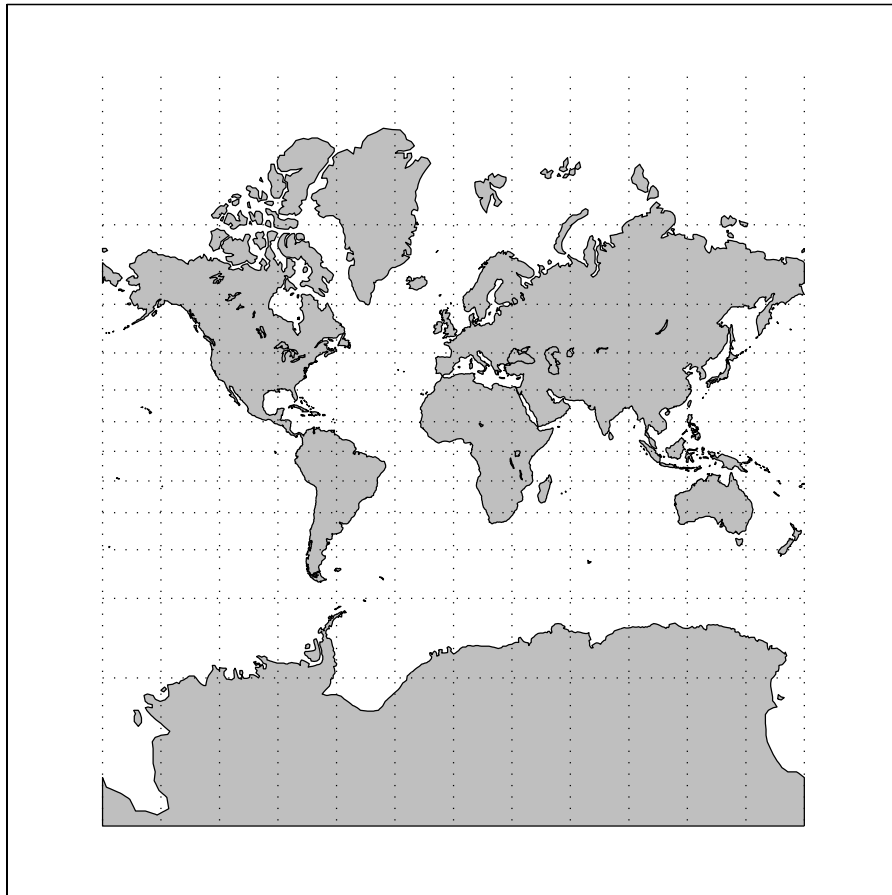


FIG. A.6: Un exemple de projection conforme : la projection cylindrique conforme de Mercator

La courbe correspondante est une ellipse de surface $|\det(JT^{-1})| = \left| \frac{\det J}{\det T} \right|$ (on retrouve le module aréolaire). et d'axe principaux les axes d'inertie de la matrice $T^{-T}J^TJT^{-1}$.

Cette ellipse est appelée indicatrice de Tissot.

Exemple de calcul

Projection équivalente de Lambert On reprend l'exemple de la projection équivalente de Lambert. Dans ce cas, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$, de sorte que l'ellipse correspond à la courbe paramétrée :

$$N(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\cos\varphi} \\ -\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

On constate que le tracé de l'ellipse est indépendant de λ . La matrice

$$T^{-T}J^TJT^{-1} = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos^2\varphi} \end{pmatrix}$$

a pour axe principaux les axes $(\varphi = Cte; \lambda = Cte)$. Comme $\cos^2\varphi \leq 1$, le petit axe est l'axe $\varphi = Cte$. on trouvera à la figure A.7 le tracé des indicatrices de Tissot en surimpression de la projection cylindrique équivalente de Lambert.

Pour la projection cylindrique conforme de Mercator, la représentation est donnée à la figure A.9. On montre, après calcul, que la matrice $T^{-T}J^TJT^{-1}$ vaut

$$T^{-T}J^TJT^{-1} = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos^2\varphi} \end{pmatrix}$$

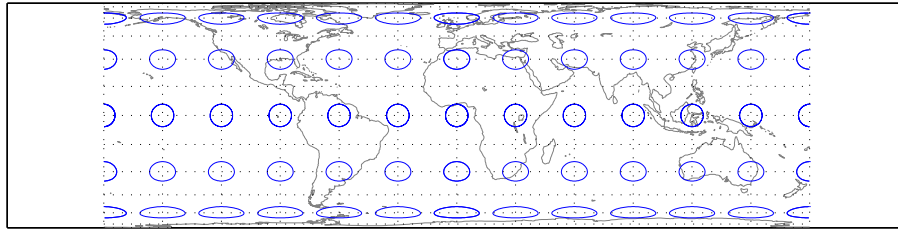


FIG. A.7: tracé des indicatrices de Tissot de la projection cylindrique équivalente de Lambert

On constate que l'équateur est la seule ligne de la projection exempte de toute déformation.

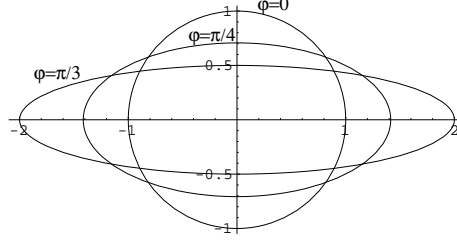


FIG. A.8: tracé de trois indicatrices de Tissot de la projection cylindrique équivalente de Lambert ; l'indicatrice $\varphi = 0$ ne présente aucune déformation

Projection conforme de Mercator Dans le cas de la projection conforme de Mercator, $J^T J = \begin{pmatrix} 1/\cos^2\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de sorte que

$$T^{-T} J^T J T^{-1} = \frac{1}{\cos^2\varphi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'indicatrice est un cercle de rayon $1/\cos\varphi$. La déformation est indépendante de la longitude considérée.

On constate que l'équateur est la seule ligne de la projection exempte de toute déformation.

De l'interprétation de l'indicatrice de Tissot L'indicatrice de Tissot (figure A.11) est un bon indicateur de la déformation que subit la surface terrestre lors de la projection : Les deux axes de l'ellipse donnent une idée de la déformation relative le long des deux axes de la représentation. Par exemple, sur la figure A.8, on observe que l'échelle le long de l'axe des x de la projection cylindrique équivalente de Lambert est deux fois l'échelle nominale de la carte pour $\varphi = \pi/3$, alors que le long de l'axe des y, elle vaut 0.5. En ce qui concerne la projection de Mercator (cf figure A.10), l'échelle de la carte est isotrope (la même dans toutes les directions). Elle vaut deux fois l'échelle nominale à la latitude $\varphi = \pi/3$.

La forme de l'ellipse donne aussi une idée de la nature de la projection : dans le cas d'une projection équivalente, la surface de l'indicatrice est conservée ; dans le cas d'une projection conforme, la forme circulaire de l'indicatrice est préservée.

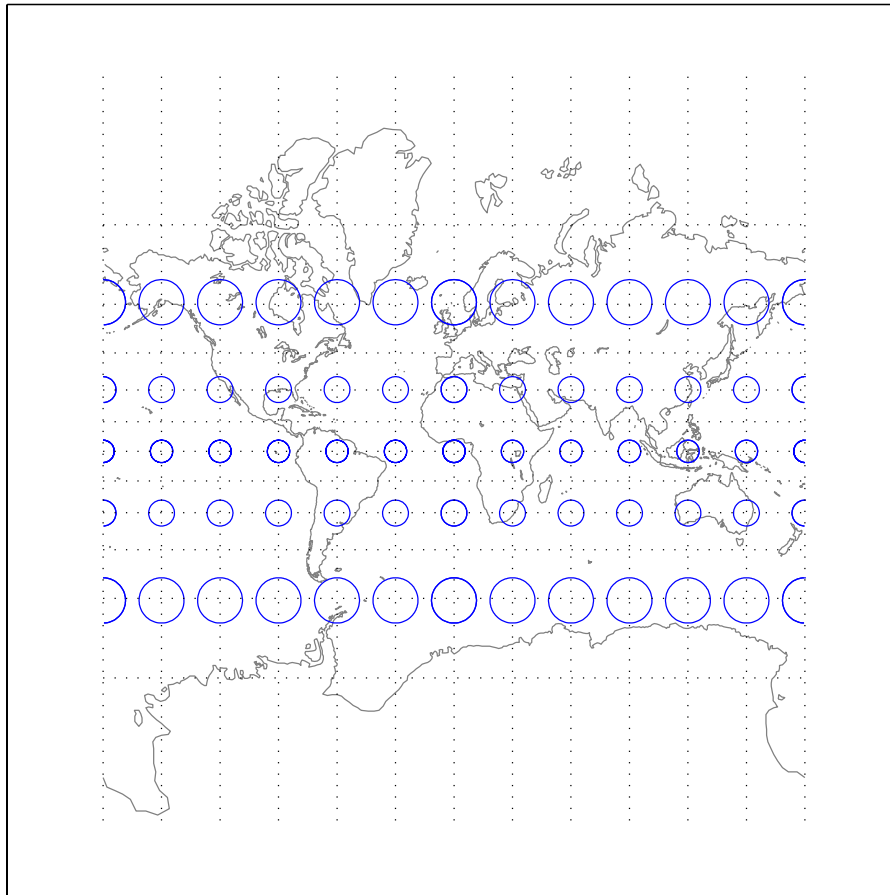


FIG. A.9: tracé des indicatrices de Tissot de la projection cylindrique conforme de Mercator

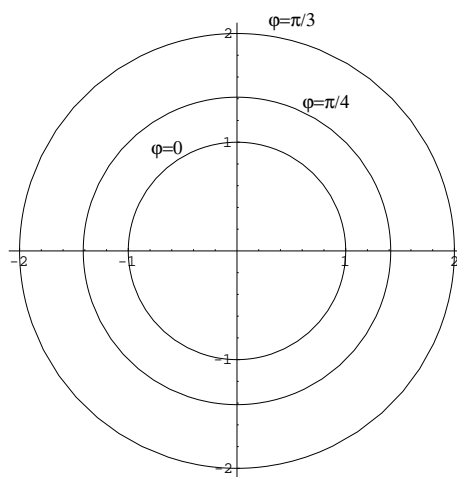


FIG. A.10: tracé de trois indicatrices de Tissot de la projection cylindrique équivalente de Lambert ; l'indicatrice $\varphi = 0$ ne présente aucune déformation

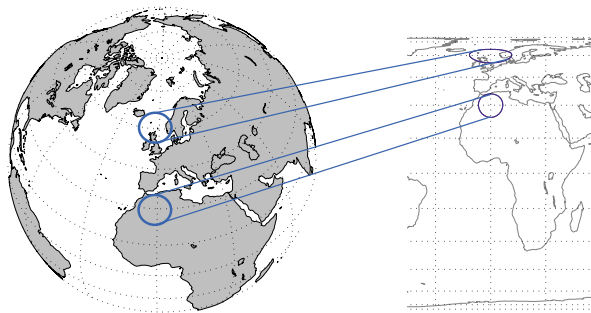


FIG. A.11: Illustration de l'indicatrice de Tissot

TABLE DES MATIÈRES

Avant propos	3
I Le référentiel géographique	5
1. Le système de référence terrestre	5
2. L'ellipsoïde de révolution	8
3. La projection cartographique	10
II Les projections sous tous les angles	15
1. Les projections azimutales	15
1.1. La projection gnomonique	16
1.2. La projection stéréographique	16
1.3. La projection orthographique	18
1.4. La projection azimutale équidistante	18
2. Les projections coniques	21
2.1. Projection de Albers	23
2.2. Projection conique conforme de Lambert	23
2.3. La projection de Bonne	25
3. Les projections cylindriques	26
3.1. Projection cylindrique équivalente de Lambert	27
3.2. Projection de Mercator	28
4. Hors des sentiers battus	28
4.1. La projection sinusoïdale	29
4.2. La projection de Mollweide	29
4.3. La projection de Hammer-Aïtoff	30
4.4. Les projections de type Eckert	31
III Quelques problèmes liés à l'usage de projections et des systèmes géodésiques	33
1. Le problème de la navigation	33
2. La représentation de la Terre	35
3. La cartographie d'un territoire	36
3.1. Généralités	36
3.2. Le cas de la France	37

3.3. Le cas de la Suisse	37
3.4. Le cas du Royaume-Uni	37
4. Calculs de distance dans les SIG	38
5. Les cartes françaises vues par la projection	40
Annexes	43
A Projections : quelques idées théoriques	45
1. Projection équivalentes	48
2. Projections conformes	50
3. Représentation des déformations : indicatrice de Tissot	51
Table des matières	57
Bibliographie	58

BIBLIOGRAPHIE

Boucher C. (1988). Nouveaux systèmes géodésiques utilisables en France. Publication interne RT/G 14, IGN/SGN.

Bugayevskiy L. M. et Snyder J. P. (1995). *Map projections – A reference manual*. Taylor and Francis.

Reignier F. (1957). *Les systèmes de projection et leurs applications*. IGN.

Richardus P. et Adler R. K. (1972). *Map projections*. North-Holland.

Snyder J. P. (1982). *Map projections used by the U. S. Geological Survey*. USGS.

Snyder J. P. (1993). *Flattening the Earth*. University of Chicago Press.

INDEX

- échelle d'une carte, 48
- Albers (projection d'), 23
- altitude, 8
- azimutale équidistante (projection), 18
- azimutales (projections), 15
- Bonne (projection de), 26
- carte, 47
- cartographie nationale (principes), 36
- changement de système de référence, 8
- coniques (projections), 21
- coordonnées géographiques, 47
- coordonnées polaires, 46
- cylindriques (projections), 26
- Eckert (projection), 31
- ellipsoïde, 8, 45
- ellipsoïde Clarke 1880, 10
- ellipsoïde WGS84, 10
- forme quadratique fondamentale, 48
- gnomonique (projection), 16
- GPS, 5
- géodésique, 33
- géométrie différentielle, 46
- géoïde, 8
- indicatrice de Tissot, 51, 54
- la carte topographique française, 37
- Lambert, 11
- Lambert (projection conique), 23
- Lambert (projection cylindrique), 27
- Lambert I, II, III, IV, 11
- latitude, 47
- longitude, 47
- Mercator (projection), 28
- mesures de distance et cartographie, 38
- module aréolaire, 49
- Mollweide (projection), 29
- métrique, 46
- navigation et projection azimutale, 33
- NTF, 8
- orthographique (projection), 18
- planisphères, 29, 35
- projection, 47
- projection cartographique, 10
- projection conforme, 50
- projection conique conforme de Lambert, 11
- projection cylindrique de Mercator, 50
- projection cylindrique équivalente de Lambert, 49
- projection équivalente, 48
- RGF93, 8

réalisation de systèmes de référence terrestres, 7
référentiel géographique, 5

sinusoïdale (projection), 29
stéréographique (projection), 16
surface, 46
système de référence terrestre, 5
système de référence WGS84, 10

WGS84, 10